

Казахский Национальный университет имени аль-Фараби

УДК 524.7

На правах рукописи

**ЖҰМАХАНОВА ГҮЛНҰР ДҮЙСЕНҒАЛИҚЫЗЫ**

**Профили тёмной материи в галактических балджах и гало**

6D061100–Физика и Астрономия

Диссертация на соискание степени  
доктора философии (PhD)

Научный консультант  
PhD, профессор  
Бошкаев К.А.

Зарубежный консультант  
PhD, профессор  
Rueda Jorge

Республика Казахстан

Алматы, 2022

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ .....</b>	<b>4</b>
<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>5</b>
<b>1 ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОФИЛИ ТЁМНОЙ МАТЕРИИ.....</b>	<b>9</b>
1.1 Исследование различных профилей тёмной материи.....	10
1.2 Фиттинг модели и кривые вращения галактик .....	11
1.3 Заключение раздела .....	<b>Ошибка! Залкада не определена.</b>
<b>2 ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТЁМНОЙ МАТЕРИИ В ГАЛАКТИКЕ U11454 .....</b>	<b>17</b>
2.1 Уравнения гидростатического равновесия и аналитические результаты .....	19
2.2 Скорость звука и показатель преломления .....	21
2.3 Методы, анализ и численные результаты.....	21
2.4 Заключение раздела .....	30
<b>3 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЯДРА-ГАЛО ТЁМНОЙ МАТЕРИИ В ГАЛАКТИКАХ .....</b>	<b>32</b>
3.1 Уравнения равновесия и граничные условия.....	34
3.2 Применение к Млечному Пути.....	42
3.3 Профиль тёмной материи: для карликовых и спиральных галактик.....	48
3.4 Заключение раздела .....	54
<b>4 ЭФФЕКТЫ НЕИСЧЕЗАЮЩЕГО ДАВЛЕНИЯ ТЁМНОЙ МАТЕРИИ В ГАЛАКТИКЕ МЛЕЧНЫЙ ПУТЬ .....</b>	<b>57</b>
4.1 Моделирование кривых вращения Галактики Млечный Путь с релятивистскими поправками.....	59
4.2 Кривые вращения галактик.....	60
4.3 Кривые вращения Галактики Млечный Путь .....	63
4.4 Байесовский анализ профиля плотности гало.....	67
4.5 Уравнение состояния тёмной материи .....	68
4.6 Ньютоновская гравитация и общая теория относительности .....	75
4.7 Линзирование тёмной материей .....	82
4.8 Заключение раздела .....	84
<b>5 ДВИЖЕНИЕ ЗВЕЗД ВБЛИЗИ ЦЕНТРА ГАЛАКТИКИ МЛЕЧНЫЙ ПУТЬ.....</b>	<b>86</b>
5.1 Экспоненциальная сфера.....	87
5.2 Уравнения движения звезд.....	89

5.3 Численные результаты.....	91
5.4 Заключение раздела .....	95
<b>Заключение.....</b>	<b>96</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....</b>	<b>97</b>

## ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$c$  – скорость света

$G$  – гравитационная постоянная

$h$  – постоянная Планка

$\Lambda$ CDM – Lambda-Cold Dark Matter

$k$  – постоянная Больцмана

$M_{\odot}$  – Масса Солнца

Sgr A\* – Стрелец A\*

a.e. – астрономическая единица

АЯГ – активное ядро галактики

АИК (AIC) – Акаике информационный критерий

БИК (BIC) – Байесовский информационный критерий

ГМП – Галактика Млечный Путь

Изо – псевдоизотермический

КВ – кривые вращения

кпк – килопарсек

НГ – Ньютоновская гравитация

НФУ – Наварро–Френк–Уайт

ОТО – общая теория относительности

РАР – Руффини-Аргельес-Руеда

СМЧД – сверхмассивная чёрная дыра

ТМ – тёмная материя

ТОВ – Толман-Оппенгеймер-Волков

УС – уравнения состояния

ЧД – чёрная дыра

## ВВЕДЕНИЕ

Тёмной материей называется таинственный вид материи, которая не излучает и не поглощает электромагнитное излучение. Тёмная материя косвенно проявляет себя только через гравитационное взаимодействие. Её наличие можно зарегистрировать, изучив кривые вращения галактик, а также гравитационные линзы. Кривая вращения галактик показывает зависимость линейной скорости объектов от радиальной координаты от центра до гало. Цвикки (1933,1937) измерил красные смещения галактик в скоплении Комы [1]. Он обнаружил, что скорости движения отдельных галактик в кластере намного больше, чем скорость, рассчитанная общей видимой массой кластера. Он пришел к предположению, что единственный способ объяснения быстрого вращения - это наличие скрытой массы, которая не видна в кластере. По его оценкам, количество тёмной материи в этом кластере может быть в 10 раз больше общей видимой массы кластера. Робертс (1966), Рубин и Форд (1970) обнаружили, что кривые вращения спиральных галактик плоские к периферии галактик [2,3] . Это противоречит ожидаемым теоретическим результатам, потому что яркость галактик быстро уменьшается при приближении к периферии, и в этой области ожидается кеплеровское снижение кривой вращения. Эта разница в теоретических и наблюдаемых кривых вращениях является доказательством существования тёмной материи.

### **Актуальность темы**

На сегодняшний день проблема, связанная с присутствием тёмной материи в космосе, о существовании которой можно утверждать из заключений, исходящих из известных законов тяготения, особенно при наблюдении кривой вращения галактик, является весьма актуальными. В современной астрофизике, предлагаемые математические модели, а также ряд косвенных экспериментальных данных говорят о наличии скрытой массы.

Данные астрофизических наблюдений свидетельствуют о наличии в нашей Вселенной, так называемых, тёмной материи и тёмной энергии, причём в масштабах значительно превосходящих обычную барионную материю. В целом современная картина мира выглядит следующим образом: на обычное вещество приходится около 5% всей массы-энергии во Вселенной, в то время как остальные 95% имеют совершенно иную, необычную, вызывающую массу вопросов природу. При этом на тёмную материю приходится около 27% заполняющего Вселенную вещества, а за остальные 68% отвечает субстанция со схожим названием – тёмная энергия [4].

В любом случае, как только будет доказано, что большая часть материи во Вселенной тёмная, ожидается, что этот компонент будет определять условия для формирования крупномасштабных структур, таких как галактики и их

скопления. Поэтому чрезвычайно важно определить количество тёмной материи, особенно в Млечном Пути.

В литературе обычно рассматривают уравнение состояния тёмной материи в гало галактики, а в диссертационной работе основное внимание уделяется на все компоненты галактики: это ядро, внутренний балдж, основной балдж, диск и гало. Для моделирования кривой вращения в гало галактики Млечный Путь, в основном, используют профиль плотности тёмной материи Наварро-Френк-Уайта. Однако, как известно, в центре галактики при  $r=0$ , плотность профиля Наварро-Френк-Уайта стремится к бесконечности, что приводит к так называемой проблеме каспа.

При исследовании движения звёзд в центральной части галактики, считают, что в центре находится сверхмассивная чёрная дыра, и данное утверждение не противоречит наблюдениям. В то же время центральная часть галактики не активна, то есть не испускает рентгеновские или гамма-лучи, которые присущи чёрным дырам. Поэтому было предположено, что в центре галактики находится сгусток тёмной материи с такой же полной массой как у сверхмассивной чёрной дыры, и было исследовано движение звёзд в поле данного объекта. В литературе есть аналогичные работы, в которых предполагаются различные модели распределения плотности. Например, модель Руффини-Аргельеса-Руеды предполагает, что в центре галактики находится некий компактный объект, состоящий из фермионов, а не сверхмассивная чёрная дыра. В отличие от данной работы мы применяем простые феноменологические профили плотности тёмной материи, которые широко известны в литературе.

**Целью работы** является исследование распределении тёмной материи в различных спиральных галактиках, включая галактику Млечный Путь с учётом её ядра, балджа, диска и гало, вычисление массы тёмной материи, используя известные феноменологические профили плотности, а также вывод уравнения состояния тёмной материи, скорости звука и анализ траектории звёзд в центральной части галактики Млечный Путь.

**Объектом исследования** являются галактики NGC 2403, NGC 3627, NGC 2976, DDO 154, NGC 1560, NGC 5585, U11454 и галактика Млечный Путь, тёмная материя.

**Предмет исследования:**

Кривые вращения галактик. Уравнения состояния для тёмной материи. Скорость звука в распределении тёмной материи. Траектории пробных тел (звёзд) в центре галактики Млечный Путь.

**Методы исследования.** Аналитические и численные методы решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, метод наименьших квадратов, Байесовский информационный критерий.

### **Задачи исследования:**

1. Провести анализ кривых вращения галактик NGC 2403, NGC 3627, NGC 2976, DDO 154, NGC 1560, NGC 5585, включая Млечный Путь, и вычислить основные параметры моделей тёмной материи, такие как центральная плотность, масштабный радиус и полная масса тёмной материи;

2. Получить профиль давления для тёмной материи из уравнения гидростатического равновесия и вычислить зависимость скорости звука от радиальной координаты;

3. Исследовать движение звёзд во внутренней части галактики на расстояниях меньше 100 астрономических единиц от центра для двух предельных случаев: 1) в гравитационном поле сверхмассивной чёрной дыры в вакууме и 2) в поле распределения тёмной материи без чёрной дыры.

**Новизна работы.** Новизна и оригинальность диссертационной работы заключаются в том, что в ней **впервые**:

1 Был использован профиль экспоненциальной сферы для распределения тёмной материи во всех структурных частях галактики Млечный Путь, и было выявлено, что профиль экспоненциальной сферы является оптимальной моделью среди феноменологических профилей плотности тёмной материи из литературы и вычислены соответствующие массы, масштабные радиусы и центральные плотности для всех компонент галактики;

2 Получен профиль давления из оптимального профиля плотности тёмной материи в галактике Млечный Путь и вычислена зависимость скорости звука от радиальной координаты;

3 Исследованы траектории движения звёзд в окрестности центра Галактики на расстояниях меньших 100 астрономических единиц в гравитационном поле сверхмассивной чёрной дыры в вакууме и тёмной материи без чёрной дыры.

### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Для описания кривой вращения Галактики оптимальным распределением тёмной материи является профиль экспоненциальной плотности (сферы)  $\rho_{\text{эксн}}(r) = \rho_0 e^{-r/r_0}$  с параметрами: для ядра  $\rho_0 = 5,8 \cdot 10^{19} \text{ М}_\odot / \text{пк}^3$ ,  $r_0 = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ пк}$ ,  $M = 4,2 \cdot 10^6 \text{ М}_\odot$ ; внутреннего балджа  $\rho_0 = 3,6 \cdot 10^4 \text{ М}_\odot / \text{пк}^3$ ,  $r_0 = 3,8 \text{ пк}$ ,  $M = 5 \cdot 10^7 \text{ М}_\odot$ ; основного балджа  $\rho_0 = 190 \text{ М}_\odot / \text{пк}^3$ ,  $r_0 = 120 \text{ пк}$ ,  $M = 8,4 \cdot 10^9 \text{ М}_\odot$ ; диска  $\rho_0 = 0,15 \text{ М}_\odot / \text{пк}^3$ ,  $r_0 = 3000 \text{ пк}$ ,  $M = 4,4 \cdot 10^{10} \text{ М}_\odot$ ; для гало  $\rho_0 = 7,56 \cdot 10^{-3} \text{ М}_\odot / \text{пк}^3$ ,  $r_0 = 12 \cdot 10^3 \text{ пк}$ ,  $M = 2,63 \cdot 10^{10} \text{ М}_\odot$ .

2. Равновесие тёмной материи в Галактике с экспоненциальным профилем распределения приводит к зависимости скорости звука от радиального расстояния, которая качественно соответствует поведению кривой вращения.

3. Круговые орбиты в гравитационном поле чёрной дыры в вакууме на расстоянии менее чем 30 астрономических единиц становятся прецессирующими эллиптическими орбитами в поле распределения тёмной материи с профилем экспоненциальной сферы без чёрной дыры.

## **Теоретическая и практическая значимость исследования**

Результаты, полученные в данной диссертации, будут весьма полезны для объяснения кривой вращения различных галактик и для вычисления массы тёмной материи. Помимо этого, знание массы тёмной материи в гало позволит наблюдать и изучать отдельные удаленные астрофизические объекты. Исследования, проведенные в этой диссертационной работе, представляют теоретическую и практическую значимость для расширения наших знаний в областях релятивистской астрофизики, космологии и физики элементарных частиц.

**Достоверность и обоснованность полученных результатов** подтверждаются наличием публикаций в журналах дальнего зарубежья с импакт-фактором и в изданиях, рекомендованных Комитетом по обеспечению качества в сфере образования и науки МОН РК, и в трудах международных научных конференций ближнего и дальнего зарубежья.

**Личный вклад автора** заключается в том, что весь объем диссертационной работы, выбор метода исследования, решения задач и численные расчеты выполнены автором самостоятельно. Постановка задач и обсуждение результатов проводились совместно с научными руководителями.

**Публикации.** По материалам диссертационной работы опубликовано 11 печатных работ: 2 в журналах из перечня КОКСОН МОН РК, для опубликования основных результатов диссертации на соискание ученой степени PhD и 1 статья входящая в 1 (первый) квартиль в базе Web of Science с импакт-фактором 5.287 и SJR 2.06; 1 работа в англоязычном издании Казахстана и 7 работ в материалах Международных научных конференций.

**Апробация диссертационной работы.** Результаты, полученные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались:

– на Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Фараби Әлемі» (2019, 2020, 2021, 2022 Алматы, Казахстан);

– на Международной научной онлайн конференции Sixteenth Marcel Grossmann Meeting, Рим, Италия, 07.07.2021г.;

– на Казахско-узбекском семинаре по теме: «Эффекты ненулевого давления тёмной материи в галактике Млечный Путь» (28.02.2021 г.);

– на Казахско-узбекском семинаре по теме: «Исследование профилей тёмной материи в галактических балджах и гало» (11.02.2022 г.);

**Объем и структура диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, 5 разделов, заключения и списка использованных источников из 156 наименований, содержит 105 страниц основного компьютерного текста, включая 47 рисунков и 13 таблиц.



# 1 ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОФИЛИ ТЁМНОЙ МАТЕРИИ

Распределение ТМ в галактиках неравномерно, оно концентрируется в их центрах и уменьшается на периферии. Используя методы численного моделирования динамики звезд в галактиках, можно найти соответствующую функцию распределения ТМ или ее профиль [5]. Для исследования распределения ТМ в пределах любой галактики в литературе был предложен ряд различных феноменологических профилей плотности [6]. В нашей работе мы использовали несколько феноменологических профилей, для того чтобы понять какой из профилей распределения плотности лучше всего описывает исследуемую галактику. В дальнейшем в данной работе мы будем использовать следующие профили: Наварро–Френк–Уайта [7], Мура [8], Эйнасто [9], псевдо-изотермический [10], Буркерт [11], экспоненциальная сфера [12], Бета [13] и Браунштейна [14]. С помощью этих профилей проанализируем наблюдательные данные и построим кривые вращения для различных галактик. Используя кривые вращения можем получить основные параметры для каждой галактики, такие как масса, плотность и масштабный радиус.

Любое моделирование эволюции галактик и их скоплений в нашей Вселенной неизменно приводило к выводу: тёмная материя должна скапливаться в центрах галактик, образуя там области весьма высокой плотности. Однако наблюдения реальных галактик показывали совсем другую картину: не то что областей повышенной концентрации, но и вообще тёмной материи в центрах галактик найти практически не удастся, что привело к так называемой проблеме касп.

Профиль гало с каспом характерным радиусом  $r_0$ , где профиль плотности имеет логарифмический наклон  $-2$  (“изотермическое” значение) и  $\rho_0$  как локальная плотность на этом радиусе  $r_0$ , с  $x = r/r_0$  безразмерным радиальным расстоянием (координата) от центра галактики до рассматриваемой точки.

– профиль Наварро–Френк–Уайта [7, p.564]:

$$\rho_{НФУ}(r) = \frac{\rho_0}{x(1+x)^2} \quad (1.1)$$

– профиль Мура [8, p.6]:

$$\rho_{Мур}(r) = \rho_0 x^{-1.16} (1+x)^{-1.84} \quad (1.2)$$

– профиль Эйнасто [9, p.75] с дополнительным параметром  $n$ , который определяет степень кривизны (форму) профиля. Семейство профилей Эйнасто с относительно большими индексами при  $n > 4$  идентифицируется с проблемой касп, в то время как низкие значения индекса при  $n < 4$  представляют собой поведение ядра. Чем ниже индекс  $n$ , тем больше профиль гало с ядром:

$$\rho_{Эйн}(r) = \rho_0 \exp\left\{2n\left(1 - x^n\right)\right\}. \quad (1.3)$$

Профили ядра с центральной плотностью  $\rho_0$  и масштабным радиусом:  
 – профиль псевдо–изотермической сферы [10, p.247] :

$$\rho_{Изо}(r) = \frac{\rho_0}{1 + x^2}, \quad (1.4)$$

– профиль Буркерта [11, L25]:

$$\rho_{Бур}(r) = \frac{\rho_0}{(1 + x)(1 + x^2)}, \quad (1.5)$$

– экспоненциальная сфера [12, P. 118]:

$$\rho_{Эксп}(r) = \rho_0 e^{-x}, \quad (1.6)$$

– профиль Бета с  $\beta = 1$  [13, p.728]:

$$\rho_{Бета}(r) = \frac{\rho_0}{(1 + x^2)^{3/2}}, \quad (1.7)$$

– профиль Браунштейна [14, p.723]:

$$\rho_{Бр}(r) = \frac{\rho_0}{1 + x^3}. \quad (1.8)$$

## 1.1 Исследование различных профилей тёмной материи

Различные, общепринятые и широко используемые феноменологические профили тёмной материи, такие как псевдо-изотермическая сфера [10, p.247], профили Буркерта [11, L25], Наварро-Френк-Уайта [7, p.564], Мура [8, p.6] и Эйнасто [9, p.75], используются для оценки распределения массы тёмной материи в различных галактиках. Основной целью данного раздела является вычислить массу, плотность и масштабный радиус тёмной материи для исследуемых галактик и сравнить соответствие полученных результатов с данными из литературы. Ньютоновская гравитация используется для выполнения вычислений в больших галактических масштабах. Распределение тёмной материи в различных типах галактик предполагается сферическим без учета сложной структуры галактик, таких как их ядра, внутренние и основные балджи, диски и гало. Теоретические кривые вращения сопоставлены с

наблюдательными данными для каждой галактики. Посредством метода наименьших квадратов параметры модели выводятся из данных наблюдений и проверяются Байесовским информационным критерием, который определяет более предпочтительную модель. Массы тёмной материи рассчитываются для каждой галактики со всеми перечисленными профилями и сравниваются с барионной массой галактик. Результаты в полном соответствии с данными в литературе.

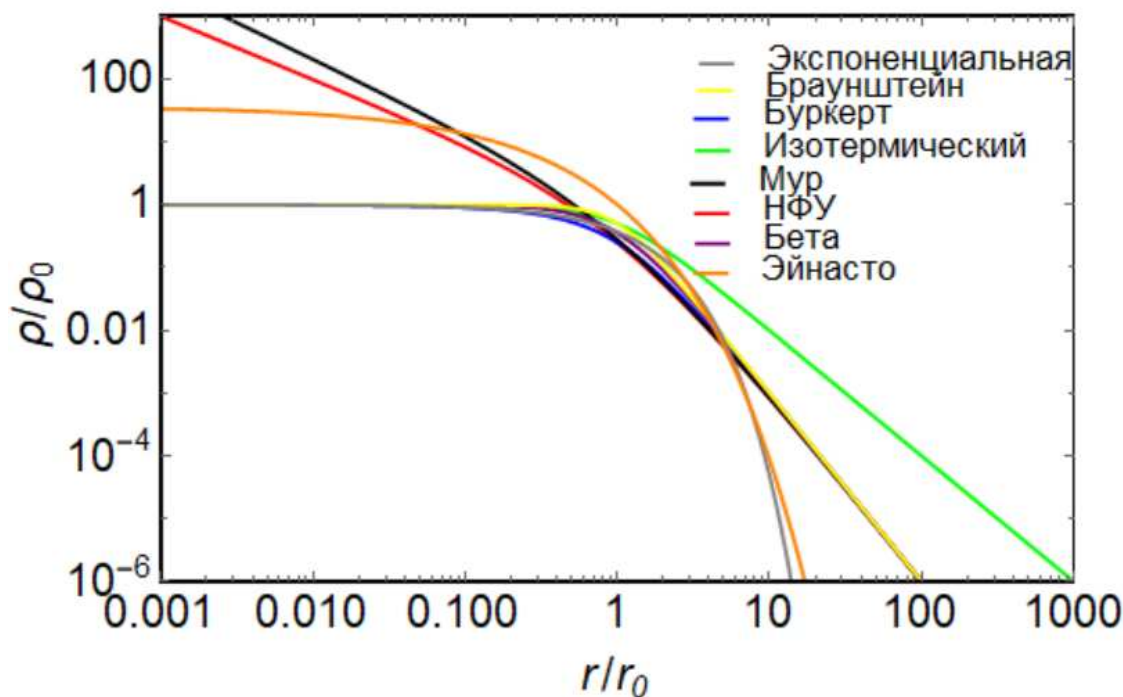


Рисунок 1– Различные феноменологические профили плотности тёмной материи. Для профиля Эйнасто мы использовали  $\alpha = 1.8$ , полученного из наблюдательных данных кривых вращения

В случае галактики Млечный Путь эти профили имеют два ограничения. Они закреплены на расстоянии 8,33 кпк, что соответствует расстоянию от центра Галактики Млечный Путь до Солнца. Второе ограничение - это общая прогнозируемая масса распределения в радиусе 60 кпк. Было предсказано, что эта масса будет  $M = 4.7 \cdot 10^{11} M_{\odot}$  [15]. Сравнение профилей показано на рисунке 1. Профили повторяют аналогичную форму, когда расстояние от центра галактики больше, чем от Солнца, и больше отличаются по направлению к центру галактики. Профили Буркерта и изотермические профили становятся постоянными и приближаются к своей характерной плотности, в то время как профили НФУ и Мура расходятся вблизи центра.

## 1.2 Фиттинг модели и кривые вращения галактик

Проблема распределения ТМ в галактиках, рассматривается в литературе [9, p.75], и в основном сосредоточена в областях гало и связана с кривыми

вращения галактик, полученными из наблюдений. Кривая вращения галактики описывает, линейные скорости движения объектов (звезд, газа и т.д.) в зависимости от радиального расстояния. В качестве примера рассмотрим массу источника (центрального объекта), вокруг которого пробная частица, движется по круговой траектории. Для этого случая скорость частицы может быть определена из уравнений закона всемирного тяготения Ньютона и центробежной силы:

$$F = G \frac{M(r) \cdot m}{r^2} = \frac{m \cdot v^2(r)}{r} \Rightarrow v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \quad (1.9)$$

где  $M(r)$  - масса центрального профиля,  $m$  - масса пробной частицы и  $r$  - расстояние между центральной массой и пробной частицей. Скорость частицы представлена как  $v(r)$ .

В отличие от солнечной системы, где основная масса сосредоточена в Солнце, в галактике масса распределена иным образом, поэтому необходимо учитывать фактическое распределение. Ожидаемая кривая вращения будет быстро расти, так как рассматриваемая масса быстро увеличивается из-за высокой плотности вблизи центра. Исходя из видимой массы, кривая вращения, как ожидается, в итоге ведет к снижению вблизи края галактики, как  $1/\sqrt{r}$  по формуле (1.9). Кривые вращения не падают в соответствии с законами Ньютона, а остаются плоскими вблизи края галактик [16].

В уравнении (1.9) мы рассчитываем профиль массы  $M(r)$  с помощью следующей формулы:

$$M(r) = \int_0^r \rho(r') \cdot 4\pi r'^2 dr' \quad (1.10)$$

где  $\rho(r)$  - профиль плотности ТМ, взятый из уравнений (1.1)–(1.5).

Для удобства выбраны такие единицы измерения, где масса задается в единицах одной солнечной массы, а радиальное расстояние в парсеках:

$$v(r) = 10^{-5} \sqrt{\frac{G \cdot M(r) \cdot M_{sun}}{r \cdot pc}} \quad (1.11)$$

где  $M_{sun} = M_{\odot}$  - масса Солнца в граммах,  $pc$  – парсек в см, а числовой коэффициент перед квадратным корнем величины  $v(r)$  преобразует единицы измерения в км/с.

Для выполнения процедуры фиттинга использовался нелинейный метод наименьших квадратов Левенберга–Марквардта [17,18].

Были сравнены фиттинги кривых вращения, полученные с помощью моделей, рассмотренных в предыдущем подразделе. Поскольку приходится сравнивать модели с разным количеством параметров, которые не наложены друг на друга, использовался Байесовский информационный критерий, сформулированный и разработанный Шварцем [19]. БИК - это критерий выбора

среди конечного набора моделей, предназначенный для решения проблемы переоснащения при увеличении числа параметров в функции фиттинга. Это обеспечивает отклонение для моделей с большим количеством параметров, чтобы проверить, какой из них с большей вероятностью будет реалистичным. Предпочтение отдается модели с минимальным значением БИК [6, p.1].

Результаты процедуры фиттинга представлены в таблицах 1–6 и на рисунках 2–7.

Таблица 1 – Параметры модели для карликовой галактики DDO 154 с неправильной формой [20]

Масса барионной материи в галактике равна $3.58 \cdot 10^8 M_{\odot}$ [5, p.14]					
Профили	$\rho_0 \pm \delta\rho_0,$ $10^{-3} \frac{M_{\odot}}{\text{пк}^3}$	$r_0 \pm \delta r_0,$ кпк	$M \pm \delta M,$ $M_{\odot}$	$n$	БИК
Буркерт	$32,74 \pm 1,47$	$2,44 \pm 0,07$	$(7,59 \pm 0,61) \cdot 10^8$	–	149
НФУ	$1,61 \pm 0,35$	$14,46 \pm 2,41$	$(1,18 \pm 0,49) \cdot 10^{10}$	–	207
Изо	$34,74 \pm 1,89$	$1,31 \pm 0,05$	$(2,07 \pm 0,22) \cdot 10^8$	–	141
Мур	$0,31 \pm 0,18$	$38,96 \pm 18,21$	$(5,23 \pm 0,14) \cdot 10^{10}$	–	235
Эйнасто	$2,73 \pm 0,27$	$4,53 \pm 0,25$	$(2,14 \pm 0,33) \cdot 10^9$	$1,72 \pm 0,13$	119

Как видно из таблицы 1, для галактики DDO 154 значение БИК минимально для профиля Эйнасто и максимально для профиля Мура. Масса, полученная с помощью профиля Эйнасто, на порядок больше барионной массы.

Таблица 2 – Параметры модели спиральной галактики NGC 1560 [21]

Масса барионной материи в галактике равна $8.2 \cdot 10^8 M_{\odot}$ [9, p.75]					
Профили	$\rho_0 \pm \delta\rho_0,$ $10^{-3} \frac{M_{\odot}}{\text{пк}^3}$	$r_0 \pm \delta r_0,$ кпк	$M \pm \delta M,$ $M_{\odot}$	$n$	БИК
Буркерт	$47,81 \pm 2,71$	$3,12 \pm 0,12$	$(2,32 \pm 0,24) \cdot 10^9$	–	142
НФУ	$2,61 \pm 0,47$	$17,32 \pm 2,38$	$(3,31 \pm 1,14) \cdot 10^{10}$	–	136
Изо	$47,11 \pm 2,93$	$1,76 \pm 0,08$	$(6,98 \pm 0,85) \cdot 10^8$	–	130
Мур	$0,54 \pm 0,22$	$43,81 \pm 13,96$	$(1,32 \pm 1,06) \cdot 10^{11}$	–	140
Эйнасто	$1,75 \pm 1,28$	$9,36 \pm 4,09$	$(1,32 \pm 1,57) \cdot 10^{10}$	$2,86 \pm 1,00$	135

Для галактики NGC 1560 значение БИК минимально для изотермического профиля и максимально для профиля Буркерта, хотя разница между результатами невелика. Стоит отметить, что небольшое улучшение БИК для модели изотермической сферы по отношению к Эйнасто и НФУ не настолько

сильное, чтобы оценить, поэтому изотермический профиль должен быть предпочтительным.

Таблица 3 – Параметры модели для спиральной галактики переходного типа NGC 2403 [22]

Масса барионной материи в галактике равна $8.2 \cdot 10^8 M_{\odot}$ [9, p.75]					
Профили	$\rho_0 \pm \delta\rho_0,$ $10^{-3} \frac{M_{\odot}}{\text{пк}^3}$	$r_0 \pm \delta r_0,$ кпк	$M \pm \delta M,$ $M_{\odot}$	$n$	БИК
Буркерт	$207,94 \pm 10,16$	$2,77 \pm 0,07$	$(7,06 \pm 0,51) \cdot 10^9$	–	1252
НФУ	$32,64 \pm 1,11$	$6,91 \pm 0,13$	$(2,62 \pm 0,14) \cdot 10^{10}$	–	764
Изо	$521,34 \pm 22,83$	$0,84 \pm 0,02$	$(8,27 \pm 0,6) \cdot 10^8$	–	842
Мур	$15,66 \pm 0,57$	$9,41 \pm 0,18$	$(3,79 \pm 0,21) \cdot 10^{10}$	–	732
Эйнасто	$4,35 \pm 0,43$	$9,43 \pm 0,48$	$(3,76 \pm 0,56) \cdot 10^{10}$	$5,98 \pm 0,27$	692

Для галактики NGC 2403 значение БИК является минимальным для профиля Эйнасто и максимальным для профиля Буркерта. Масса, полученная профилем Эйнасто на порядок больше видимой массы.

Таблица 4 – Параметры модели для спиральной галактики без перемычки NGC 2976 [23]

Масса барионной материи в галактике равна $1.36 \cdot 10^8 M_{\odot}$ [5, p.14]					
Профили	$\rho_0 \pm \delta\rho_0,$ $10^{-3} \frac{M_{\odot}}{\text{пк}^3}$	$r_0 \pm \delta r_0,$ кпк	$M \pm \delta M,$ $M_{\odot}$	$n$	БИК
Буркерт	$273,17 \pm 12,6$	$1,7 \pm 0,08$	$(2,14 \pm 0,24) \cdot 10^9$	–	126
НФУ	$0,77 \pm 3,73$	$38,45 \pm 664,6$	$(0,49 \pm 5,61) \cdot 10^{13}$	–	174
Изо	$238,66 \pm 11,5$	$1,07 \pm 0,05$	$(7,91 \pm 1,04) \cdot 10^8$	–	129
Мур	$0,05 \pm 2,1$	$758,54 \pm 3040$	$(0,06 \pm 2,72) \cdot 10^{15}$	–	202
Эйнасто	$35,5 \pm 12,3$	$2,52 \pm 0,61$	$(0,39 \pm 2,72) \cdot 10^9$	$1,1 \pm 0,3$	128

Для галактики NGC 2976 значение БИК минимально для профиля Буркерта и максимально для профиля Мура. Как и прежде, небольшая разница БИК по отношению к профилям Эйнасто, изотермическому и Буркерта не позволяет оценить, какая модель лучше (они сопоставимы друг с другом). Для этой галактики масса, определяемая профилем Буркерта, в десять раз больше видимой массы. Видимая масса – масса частиц, которые состоят из барионов, т.е. из электронов, протонов и нейтронов.

Таблица 5 – Параметры модели для спиральной галактики NGC 3627 [24]

Масса барионной материи в галактике равна $8.18 \cdot 10^8 M_{\odot}$ [5, p.14]					
Профили	$\rho_0 \pm \delta\rho_0,$ $10^{-3} \frac{M_{\odot}}{\text{пк}^3}$	$r_0 \pm \delta r_0,$ кпк	$M \pm \delta M, M_{\odot}$	$N$	БИК
Буркерт	$2660 \pm 477$	$1,16 \pm 0,09$	$(6,61 \pm 0,24) \cdot 10^9$	–	53
НФУ	$1670 \pm 498$	$1,47 \pm 0,21$	$(1,28 \pm 0,53) \cdot 10^{10}$	–	60
Изо	$43938 \pm 148672$	$0,13 \pm 0,22$	$(2,57 \pm 7,79) \cdot 10^{10}$	–	86
Мур	$1087 \pm 343$	$1,71 \pm 0,24$	$(1,57 \pm 0,69) \cdot 10^{10}$	–	61
Эйнасто	$147,4 \pm 9,9$	$2,71 \pm 0,11$	$(2,21 \pm 0,25) \cdot 10^{10}$	$1,04 \pm 0,13$	30

Для галактики NGC 3627 значение БИК минимально для профиля Эйнасто и максимально для изотермического профиля. Здесь масса, определяемая профилем Эйнасто, на порядок больше барионной массы.

Таблица 6 – Параметры модели спиральной галактики NGC 5585 [25]

Масса барионной материи в галактике равна $1.6 \cdot 10^9 M_{\odot}$ [21, p.24]					
Профили	$\rho_0 \pm \delta\rho_0,$ $10^{-3} \frac{M_{\odot}}{\text{пк}^3}$	$r_0 \pm \delta r_0,$ кпк	$M \pm \delta M,$ $M_{\odot}$	$n$	БИК
Буркерт	$89,6 \pm 2,3$	$2,83 \pm 0,05$	$(3,24 \pm 0,14) \cdot 10^9$	–	38
НФУ	$6,02 \pm 1,4$	$12,56 \pm 2,02$	$(2,89 \pm 1,2) \cdot 10^{10}$	–	76
Изо	$90,5 \pm 4,5$	$1,52 \pm 0,05$	$(8,57 \pm 0,82) \cdot 10^8$	–	51
Мур	$1,79 \pm 0,77$	$23,69 \pm 7,27$	$(6,93 \pm 4,85) \cdot 10^{10}$	–	81
Эйнасто	$10,26 \pm 0,61$	$4,48 \pm 0,12$	$(7,3 \pm 0,6) \cdot 10^9$	$1,27 \pm 0,08$	33

Для галактики NGC 5585 значение БИК минимально для профиля Эйнасто и максимально для профиля Мура. Здесь, как и прежде, БИК аналогичен моделям Эйнасто и Буркерта. Масса, выведенная профилем Эйнасто, имеет тот же порядок, что и видимая масса.

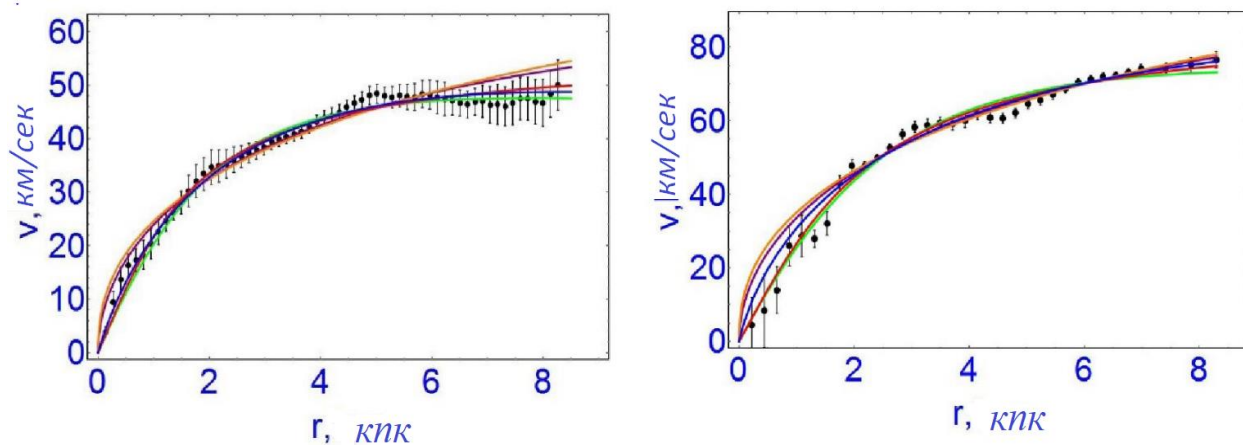


Рисунок 2 – Кривые вращения галактик и фиттинг моделей.  
 Левая панель: галактика DDO 154. Правая панель: галактика NGC 1560

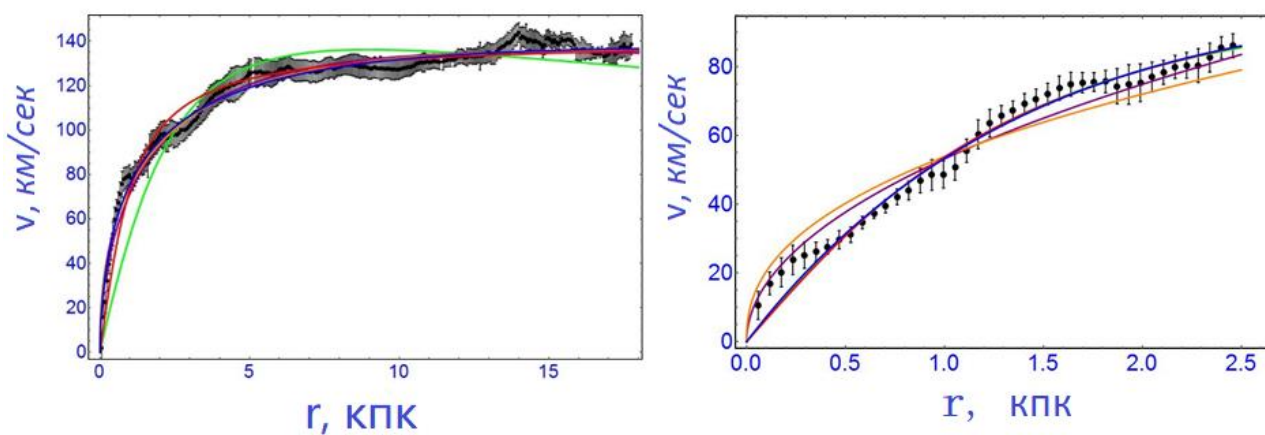


Рисунок 3 – Кривые вращения галактик и фиттинг моделей.  
 Левая панель: галактика NGC 2403. Правая панель: галактика NGC 2976

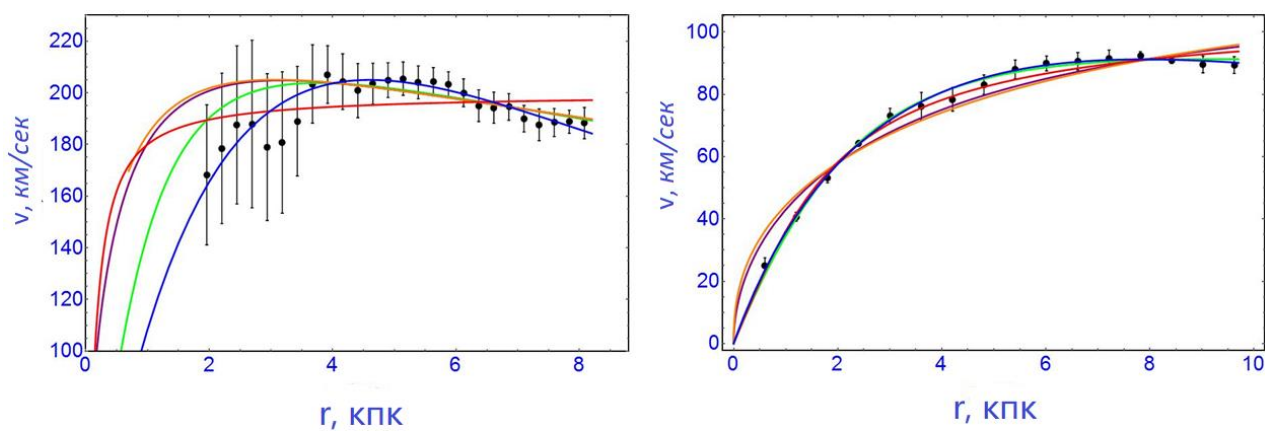


Рисунок 4 – Кривые вращения галактик и фиттинг модели.  
 Левая панель: галактика NGC 3627. Правая панель: галактика NGC 5585



На рисунках 2–4 круглые чёрные точки показывают наблюдательные данные с их линиями погрешностей для одной карликовой и пяти спиральных галактик, зеленые кривые показывают профиль Буркерта, фиолетовые кривые – профиль НФУ, красные кривые - изотермический профиль, оранжевые кривые – профиль Мура, а синие кривые показывают профиль Эйнасто. Теоретические кривые получены с помощью процедуры фиттинга. Используя метод наименьших квадратов, мы рассчитали численные значения масштабного радиуса и характеристической плотности. В случае профиля Эйнасто также было получено значение индекса Эйнасто. В дополнении, вычислена масса ТМ в галактиках [26].

### 1.3 Выводы по 1 разделу

В этом подразделе проанализировано пять спиральных и одна карликовая галактики. Сложная структура галактик не рассматривалась, и распределение ТМ было принято сферическим для них. Кривые вращения, построенные в этой работе, были сопоставлены с аналогичными результатами в литературе для галактик NGC 2403, NGC 3627, NGC 2976, DDO 154 в работе [5, p.14] и для галактик NGC 5585 и NGC 1560 в работах [25] и [21, p.24] соответственно.

Параметры моделей были выведены из наблюдательных данных КВ с помощью команды NonlinearModelFit в программном обеспечении Wolfram Mathematica 11. Команда позволяет автоматически выполнять процедуру фиттинга для заданной модели и наблюдательных данных. В результате была оценена общая масса ТМ в рассматриваемых галактиках и сравнена с их барионными массами. Масса ТМ во многих случаях больше, чем видимая масса, как и ожидалось.

Модель Эйнасто показала наилучшие результаты в четырех случаях (DDO154, NGC 2403, NGC 3627, NGC 5585), Буркерт и изотермические профили показали хорошие результаты для галактик NGC 2976 и NGC 1560 соответственно, так как значение БИК было самым низким по сравнению с другими моделями. В отличие от других моделей, модель Эйнасто зависит от трех параметров. Таким образом, наблюдается более высокое соответствие наблюдениям.

Профиль НФУ показала небольшие отклонения исследуемых галактик NGC 5585, NGC 1560, NGC 2976. В других профилях у нас нет заметных различий.

В целом, все модели, рассмотренные в этом разделе, показали хорошие результаты, хотя в некоторых случаях не все наблюдательные данные были сопоставлены с теоретическими кривыми. Эти расхождения могут быть вызваны тем фактом, что в данной работе игнорировали сложную структуру барионной составляющей галактик. Если принять во внимание внутреннюю структуру галактик, как в [27], и составные части материи, как в [28], вероятно, результаты будут намного лучше, чем представленные в этом разделе.

Тем не менее, есть еще много открытых вопросов о тёмной материи. Хотя можно косвенно наблюдать её присутствие в любой галактике или скоплениях.

Всё ещё остается вопросом, почему распределение ТМ так сильно отличаются в одной галактике от другой. Например, недавнее открытие распределения ТМ в галактике Маркаряна показывает, что в ТМ основном сосредоточена в ядре галактики [29]. Другой пример показывает галактику, в которой почти нет ТМ [30].

Природа частиц ТМ все еще остается загадкой, хотя существуют некоторые теоретические модели, предсказывающие весь набор частиц ТМ, в работах [4,31]. Роль тёмной материи в эволюции Вселенной еще предстоит понять.

## 2 ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТЁМНОЙ МАТЕРИИ В ГАЛАКТИКЕ U11454

В этом разделе для изучения распределения ТМ в выбранной галактике в основном рассмотрены широко используемые профили плотности, такие как: псевдоизотермический [10, p.247], Буркерт [11, L25], Бета [13, p.728], Браунштейн [14, p.723], Эйнасто [9, p.75] и экспоненциальная сфера [12, p. 118] в рамках НГ. Данная галактика была выбрана из-за большого количества наблюдательных данных. Анализируя наблюдательные данные КВ, получены неизвестные параметры модели гало ТМ для всех профилей. По аналогии с [32] предположено, что уравнение состояния ТМ в конкретной галактике по умолчанию не зависит от профилей плотности. Следовательно, в данном разделе намерены проверить, справедливо ли это предположение для галактики U11454 [33]. Более того, чтобы избежать проблемы каспов, фокус направлен на профили плотности ядра. Такая процедура согласуется с тем фактом, что плотность и давление ТМ в центре галактики должны быть конечными.

Следуя работе [32, p.75] нами решено уравнение гидростатического равновесия в пределах НГ, чтобы найти профили давления. УС тёмной материи для галактики U11454 можно получить, выразив давление в терминах плотности для каждой отдельной модели. Для некоторых профилей УС получаются аналитически [34], но для других это можно сделать только численно [35]. Таким образом, основная цель этого раздела проверить, зависит ли УС ТМ от принятого профиля плотности или нет. Используя УС ТМ, нами вычислена скорость звука, а также показатель преломления, которые играют ключевую роль в формировании структур [36] и в эффекте гравитационного линзирования [37].

### 2.1 Уравнения гидростатического равновесия и аналитические результаты

Основной целью данного подраздела является получение уравнения состояния ТМ в режиме НГ. Для этого мы начнем со стандартных ньютоновских уравнений гидростатического равновесия, заданных в следующем виде:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (2.1)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\rho(r) \frac{GM(r)}{r^2} \quad (2.2)$$

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2} \quad (2.3)$$

где  $M(r)$  - профиль массы, заключенный внутри сферы радиуса  $r$ ,  $P(r)$  - давление ТМ,  $G$  - ньютоновская гравитационная постоянная и  $\Phi(r)$  - гравитационный потенциал. Для получения выражений профиля плотности давления (1.3)-(1.8) отдельно подставляются в формулы (2.1)-(2.3). Интегрируя выражение для давления, и используя граничные условия, установили, что  $P$  исчезает, когда  $r$  приближается к бесконечности и  $P$  становится конечным, когда  $r$  стремится к нулю. Вириальный радиус гравитационно связанной астрофизической системы - это радиус, в пределах которого применяется теорема вириала. Он определяется как радиус, при котором плотность равна критической плотности Вселенной при красном смещении системы.

Для профилей Изо, Бета и экспоненциальной сферы все расчеты были выполнены аналитически, тогда как для профилей Эйнасто, Браунштейна и Буркерта все анализы были выполнены численно. Формулы давления и УС для профилей Изо и экспоненциальной сферы в уравнениях (1.4) и (1.5) приведены в работе [32, p.75], для Бета - профиля нами были получены следующие уравнения:

$$M_{\text{Бета}}(r) = 4\pi r_0^3 \rho_0 \left\{ \operatorname{ar\,sinh}(x) - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right\}, \quad (2.4)$$

$$P_{\text{Бета}}(r) = 4\pi G r_0^2 \rho_0 \left\{ \frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{1+2x^2}{x\sqrt{1+x^2}} \operatorname{ar\,sinh}(x) - 2 \ln\left(2\sqrt{1+x^2}\right) \right\}, \quad (2.5)$$

$$\Phi_{\text{Бета}}(r) = -\frac{4\pi G r_0^2 \rho_0}{x} \left\{ \operatorname{ar\,sinh}(x) - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right\}. \quad (2.6)$$

где  $x = r/r_0$ ,  $X = R/r_0$ , и  $R$  радиус гало ТМ, оцениваемый путем сопоставления внутренних и внешних потенциалов. Поскольку  $R$  не совсем определенная величина, обычно для практических целей ее устанавливают равной вириальному радиусу гало ТМ.

УС данной жидкости характеризует физические особенности самой жидкости и показывает, её поведение, когда она не находится в состоянии равновесия. Объединяя уравнения (2.5) вместе с уравнением (1.7), нами получено УС для Бета – профиля:

$$P_{\text{Бета}}(\rho) = 4\pi G r_0^2 \rho_0^2 \left\{ \frac{\xi}{2} + \frac{2-\xi}{\sqrt{\xi-1}} \operatorname{ar\,sinh}\left(\sqrt{\frac{\xi-1}{\xi}}\right) - 2 \ln\left(\frac{2}{\sqrt{\xi}}\right) \right\} \quad (2.7)$$

где  $\xi = \xi(\rho/\rho_0)^{2/3}$ , уравнение (2.7) для Бета - профиля был получен впервые [38]. Кроме того, термодинамические свойства жидкости скрыты внутри параметра состояния, определяемого как:

$$\omega = \frac{P}{c^2 \rho'} \quad (2.8)$$

который также известен как баротропный параметр. В нашем случае давление не исчезает внутри распределения ТМ, и соответствующие формулы УС имеют сложный вид для некоторых профилей.

## 2.2 Скорость звука и показатель преломления

Используя скорость звука, мы можем учесть возмущения, вызванные жидкостью ТМ. Его определение в случае адиабатических возмущений является:

$$c_s^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \quad (2.9)$$

Скорость звука для профилей Изо и экспоненциальной сферы приведена в работе [32] и для Бета-профиля находим его из уравнения (2.7)

$$c_{s(\text{Бета})}^2 = \frac{4\pi G r_0^2 \rho_0}{3} \frac{\sqrt{\xi}}{1-\xi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \operatorname{ar\,sinh} \sqrt{\left( \frac{1-\xi}{\xi} \right) - 1} \right\} \quad (2.10)$$

Кроме того, нами было рассчитано и показано, что ТМ дает показатель преломления, который немного больше, чем чистый вакуум. Это можно заметить при изучении оптических свойств рассматриваемой галактики [39]. Таким образом, здесь исследуется показатель преломления гало ТМ галактики U11454 для всех профилей. Показатель преломления в области ТМ в режиме слабого поля определяется по формуле:

$$n(r) = 1 - \frac{\Phi(r)}{c^2} - \int \frac{GM(r)}{c^2 r^2} dr \quad (2.11)$$

где  $\Phi(r)$  является внутренним гравитационным потенциалом для данного профиля плотности ТМ, полученного путем решения уравнения (2.3), и является скоростью света в вакууме. Интеграция выполняется в диапазоне радиальных координат, взятых из наблюдательных данных КВ [33].

## 2.3 Методы, анализ и численные результаты

Основная наша цель показать, что в результате нашего анализа, путем тестирования различных профилей для такой галактики, закон плотности гало ТМ может быть учтен для кинематики всего семейства дисковых (спиральных) галактик, таких как U11454. Для полноты картины важно подчеркнуть, что вклад газа в балдж и диск галактики имеет решающее значение для характеристики КВ. В свою очередь, КВ позволяют определить распределение

массы галактики по радиальному расстоянию. В стандартном подходе все составляющие галактики должны учитываться по аналогии с [12, р. 118]. Однако их вклад ТМ в гало невелик. Более того, внутренние части U11454 описаны не полностью [33]. Поэтому можно пренебречь вкладом всех составляющих галактики, кроме гало, и для простоты принять

$$v_{tot}^2 \approx v^2 \quad (2.12)$$

где  $v$  является вкладом скорости профиля гало ТМ.

Далее применяется нелинейный метод наименьших квадратов Левенберга-Марквардта, чтобы найти минимум функции  $\chi^2$ . Алгоритм Левенберга-Марквардта представляет собой итерационный метод, который определяет минимум функции, выражаемой в виде суммы квадратов нелинейных функций. Он заключается в сочетании алгоритма Гаусса–Ньютона и метода градиентного спуска [40,41]. Итак, функция  $\chi^2$  определяется следующим образом:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{v_i^{obs} - v(\rho_0, r_0, r)}{\sigma_{v,i}^{obs}} \right]^2 \quad (2.13)$$

где  $v_i^{obs}$  и  $\sigma_{v,i}^{obs}$  являются точками данных  $N$  и их соответствующими погрешностями КВ для U11454, см. рисунок 5, в то время как  $v(\rho_0, r_0, r)$  задается формулами (1.9)-(1.10) и описывает КВ каждого профиля для ТМ.

Таблица 7 – Параметры модели для галактики U11454

Профил и	$\rho_0 \pm \sigma_{\rho_0}, 10^{-3}$	$r_0 \pm \sigma_{r_0}, (кпк)$	$r_{vir}, (кпк)$	$M_{vir},$ ( $10^{10} M_{\odot}$ )	$M \pm \sigma_M^a$ ( $10^{10} M_{\odot}$ )	$M \pm \sigma_M^b$ ( $10^{10} M_{\odot}$ )	ΔБИК	$\chi^2$
Бега	$104,0 \pm 10,8$	$3,7 \pm 0,2$	56,8	15,6	$6,0 \pm 1,0$	$1,1 \pm 0,3$	17	1,5
Браунш тейн	$81,0 \pm 10,0$	$3,6 \pm 0,3$	51,7	12,7	$5,7 \pm 1,2$	$1,1 \pm 0,4$	24	2,8
Буркерт	$139,0 \pm 12,9$	$3,7 \pm 0,2$	62,3	18,6	$6,1 \pm 0,9$	$1,1 \pm 0,3$	12	1,0
Эйнасто	$10,5 \pm 2,6$	$7,2 \pm 0,9$	42,5	14,0	$6,4 \pm 2,2$	$3,4 \pm 2,0$	9	0
Эксп. сфера	$130,9 \pm 12,9$	$2,8 \pm 0,2$	24,1	7,5	$5,9 \pm 1,0$	$0,6 \pm 0,2$	18	1,7
Изо	$151,0 \pm 11,7$	$1,9 \pm 0,1$	142,8	98,6	$6,5 \pm 0,8$	$0,3 \pm 0,1$	0	0,4

Параметры наилучшего фиттинга, минимизирующие  $\chi^2$  для каждого профиля ТМ, перечислены в таблице 7 и показаны на рисунке 5. В таблице 7 показываем, значения  $\rho_0$ ,  $r_0$  и массы, выраженного в единицах солнечной массы  $M_{\odot}$ , с их столбцами погрешностей, соответственно. В последних двух столбцах представлены статистические данные БИК и соответствующие  $\chi^2$ ,

используемые для вычисления значений БИК.  $r_{vir}$  обозначает вириальный радиус, определяемый как радиус, при котором плотность равна критической плотности Вселенной, умноженной на 200 и  $M_{vir}$  - соответствующая вириальная масса. <sup>a</sup> Масса ТМ рассчитывается с использованием последних четырех наблюдательных точек в гало для  $r$ . <sup>b</sup> Масса ТМ рассчитывается с использованием масштабного радиуса  $r_0$ . <sup>c</sup> Значения БИК  $\equiv \{84,91,79,76,85,67\}$  предназначены для профилей Бета, Браунштейна, Буркерта, Эйнасто, экспоненциальной сферы и Изо соответственно; нами определен  $\Delta\text{БИК} \equiv \text{БИК} - \text{БИК}_0$ , с  $\text{БИК}_0 = 67$  изотермическое эталонное значение. Для профиля Эйнасто  $\alpha = 1,8 \pm 0,3$ . Параметры  $\rho_0$  и  $r_0$ , перечисленные в таблице 7 согласуются с результатами работы [42]. Количество массы ТМ в галактике, рассчитанное с использованием различных профилей, также показано в таблице 7, и показано, что оно согласуется с результатами работы [42] для профилей Изо и Буркерта. Значения  $\chi^2$  также показаны в последнем столбце таблицы 7.

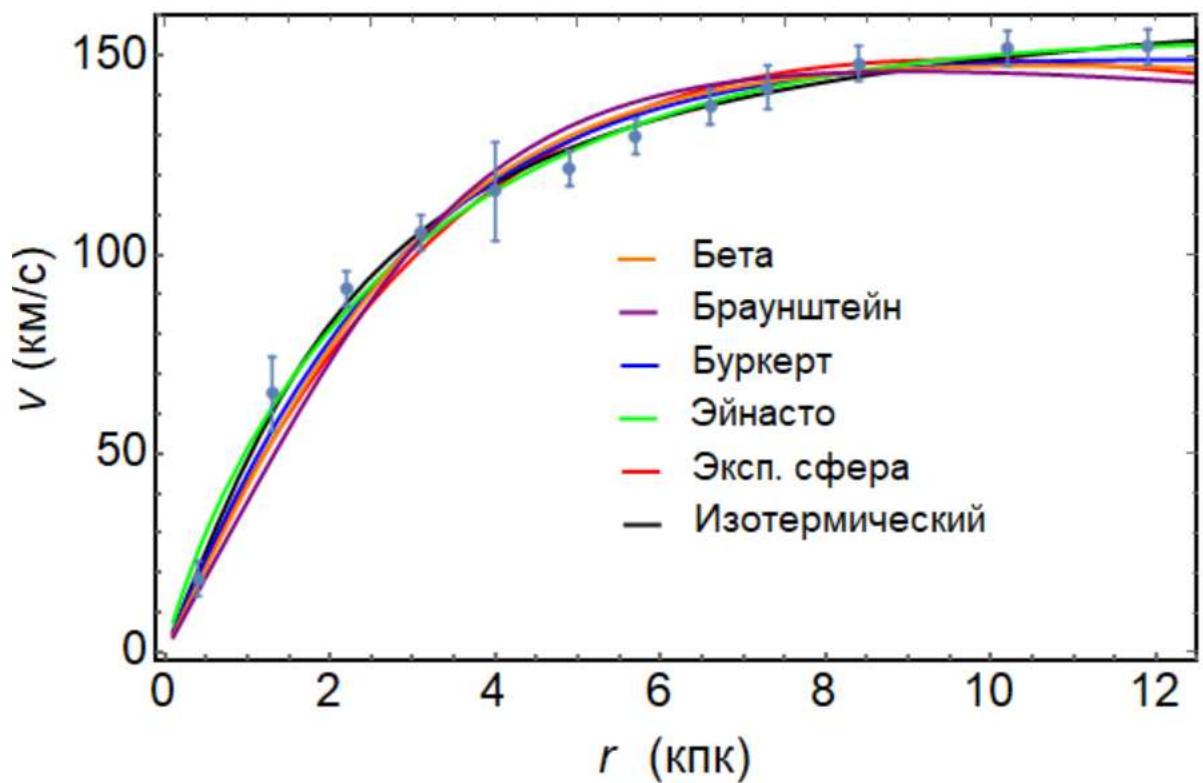


Рисунок 5 –Кривые вращения галактики U11454 и профили фиттинга

Для сравнения выбранных 6 профилей, которые имеют разное количество параметров и не вложены друг в друга, мы используем БИК [19, р.462]. Для полноты обратите внимание, что могут также использоваться другие критерии отбора, например, информационный критерий Акаике и/или критерии информации об отклонении [43,44]. Используя  $\chi^2$ , БИК определяется как:

$$BIC = \chi^2 + k \ln N \quad (2.14)$$

где через  $k$  указано количество параметров модели. Для профиля Эйнасто  $k = 3$ , в то время как для всех остальных профилей  $k = 2$ . Профиль с минимальным значением БИК предпочтителен, согласно работе [6, р.1]. Как видно из таблицы 7. для галактики U11454, значение БИК является минимальным для профиля Изо и максимальным для профиля Браунштейна, хотя разница между значениями невелика.

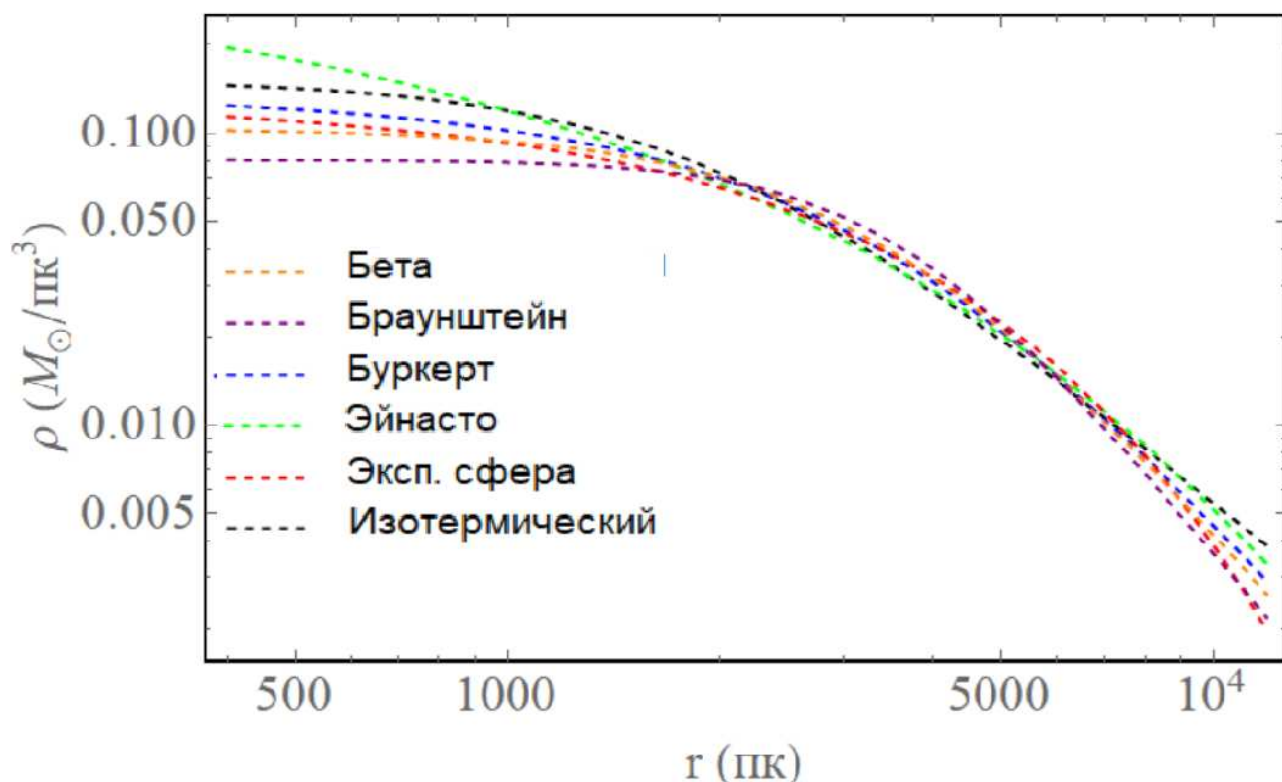


Рисунок 6 – Профили логарифмической плотности тёмной материи в гало

На рисунке 5 показана КВ галактики U11454 и теоретические кривые для различных профилей, принятых в этом разделе. Здесь серые точки показывают наблюдательные данные с их линиями погрешностей; сплошные кривые показывают профили Изо (чёрный), экспоненциальной сферы (красный), Эйнасто (зеленый), Буркерта (синий), Бета (оранжевый) и Браунштейна (фиолетовый). На рисунке 6 представлены профили логарифмической плотности с выведенными параметрами фиттинга из модели.



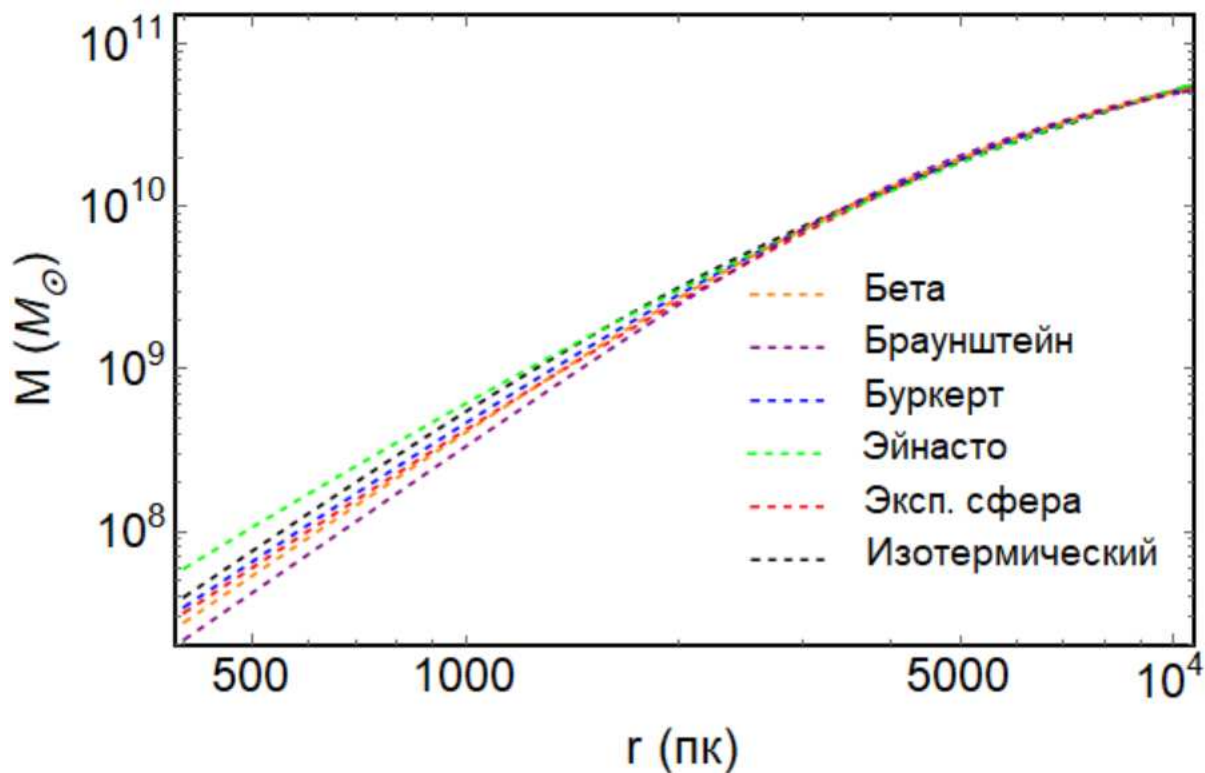


Рисунок 7 – Логарифмические профили массы тёмной материи в гало

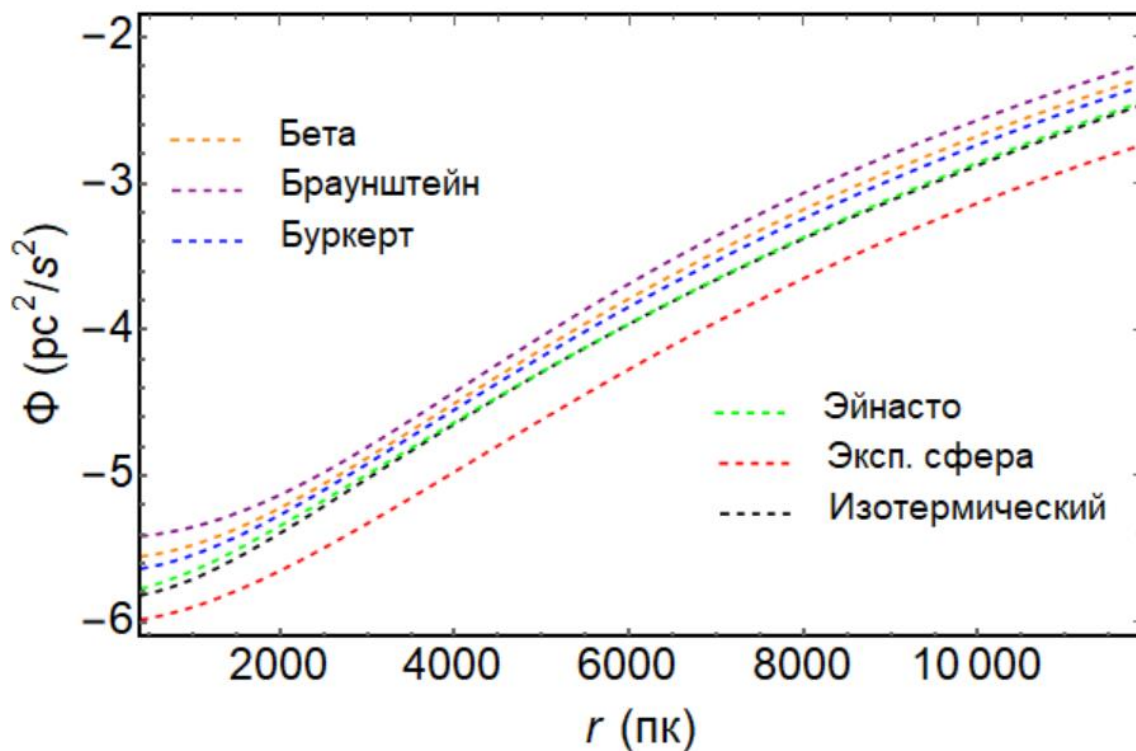


Рисунок 8 – Логарифмический гравитационный потенциал тёмной материи в гало. Обратите внимание, что ось  $y$  умножается на  $10^{-23}$

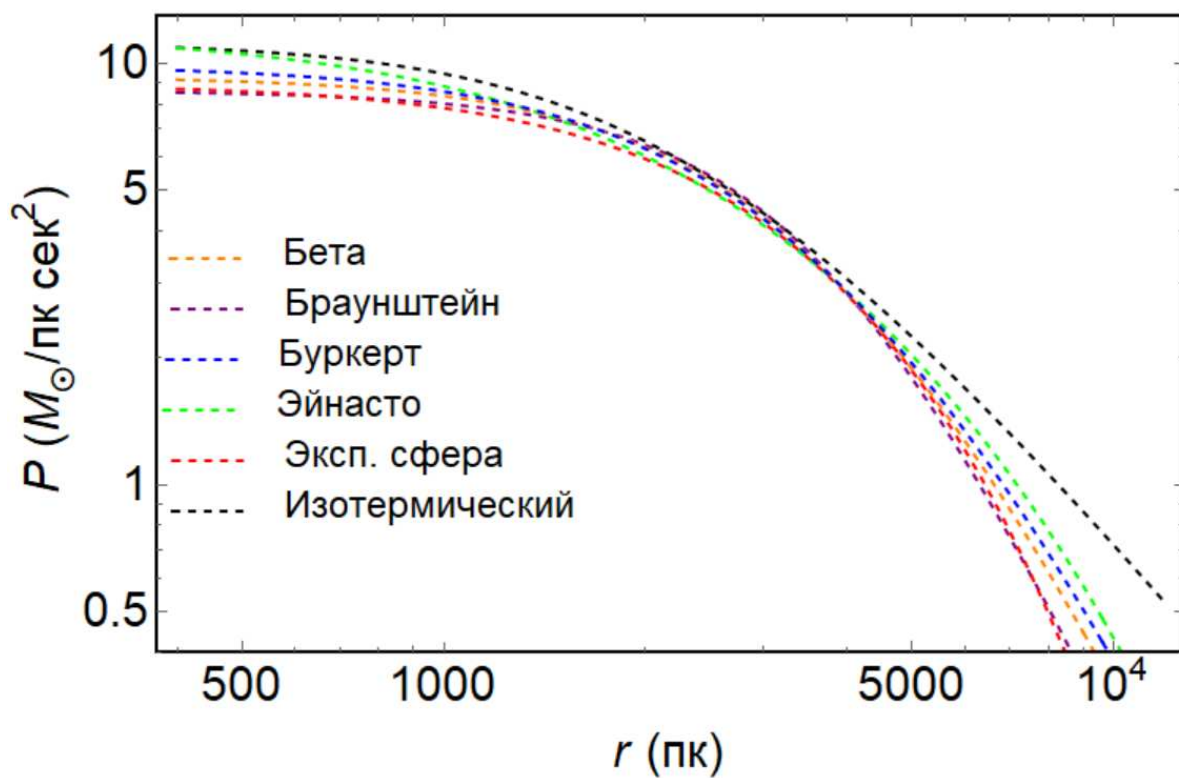


Рисунок 9 – Логарифмические профили давления тёмной материи в гало. Обратите внимание, что ось  $u$  умножается на  $10^{-25}$

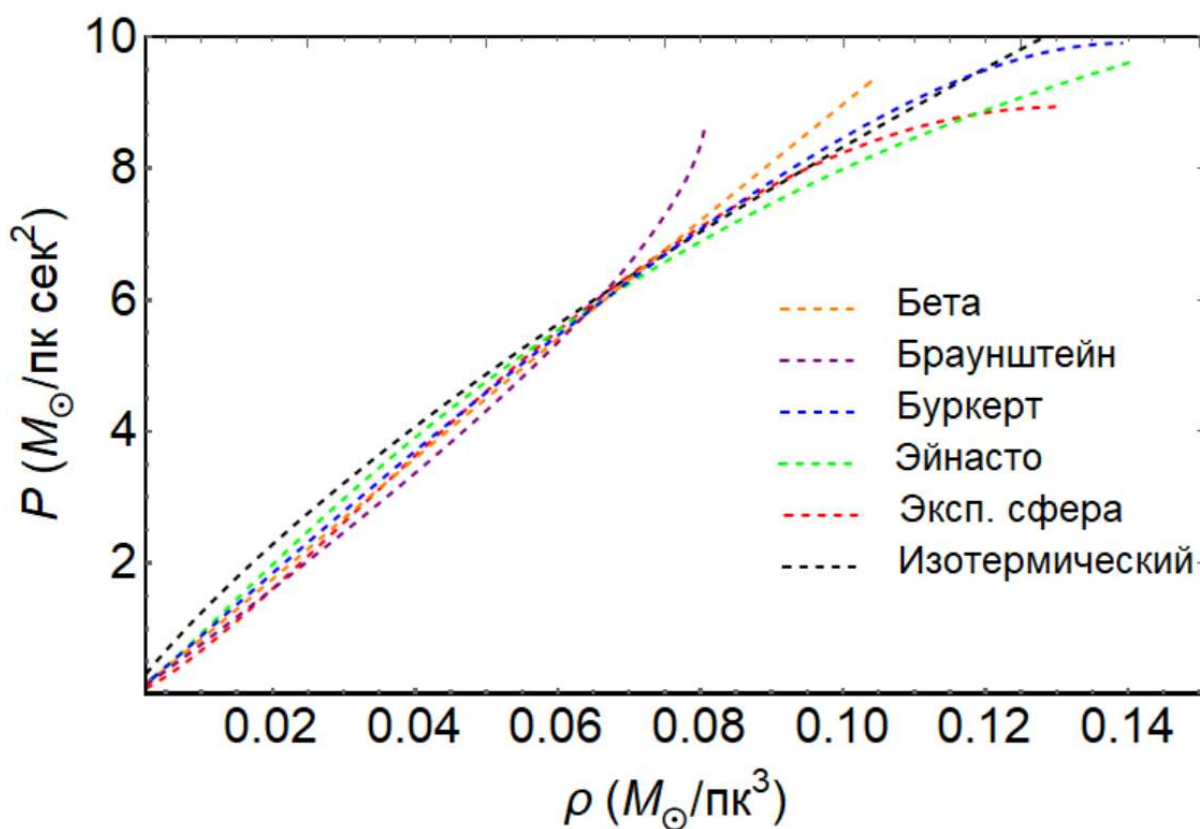


Рисунок 10 – Уравнение состояния гало ТМ. Обратите внимание, что ось  $u$  умножается на  $10^{-25}$

На рисунке 7 масса в единицах солнечной массы отображается как функция радиальной координаты. На больших расстояниях все профили производят одинаковую массу.

На рисунке 8 внутренний гравитационный потенциал показан как функция радиальной координаты в рассматриваемом диапазоне. Поведение потенциала для различных профилей практически идентичны.

На рисунках 9-10 построены профили давления  $P(r)$  и уравнение состояния для галактики U11454, используя все модели гало ТМ, т.е. уравнения (1.3)-(1.8), и решая уравнения (2.1)-(2.2). Здесь можно выбрать различные единицы измерения, используя следующие коэффициенты преобразования для плотности и давления  $\frac{1M_{\odot}}{\text{пк}^3} = 6.77 \times \frac{10^{-23}\text{г}}{\text{см}^3} = 38.05(\text{ГэВ}/c^2)/\text{см}^3$  и  $\frac{1M_{\odot}}{(\text{пк сек}^2)} = 6.44 \times \frac{10^{14}\text{г}}{(\text{см сек}^2)} = 3.62 \times 10^{38}(\text{ГэВ}/c^2)/(\text{см сек}^2)$ , соответственно.

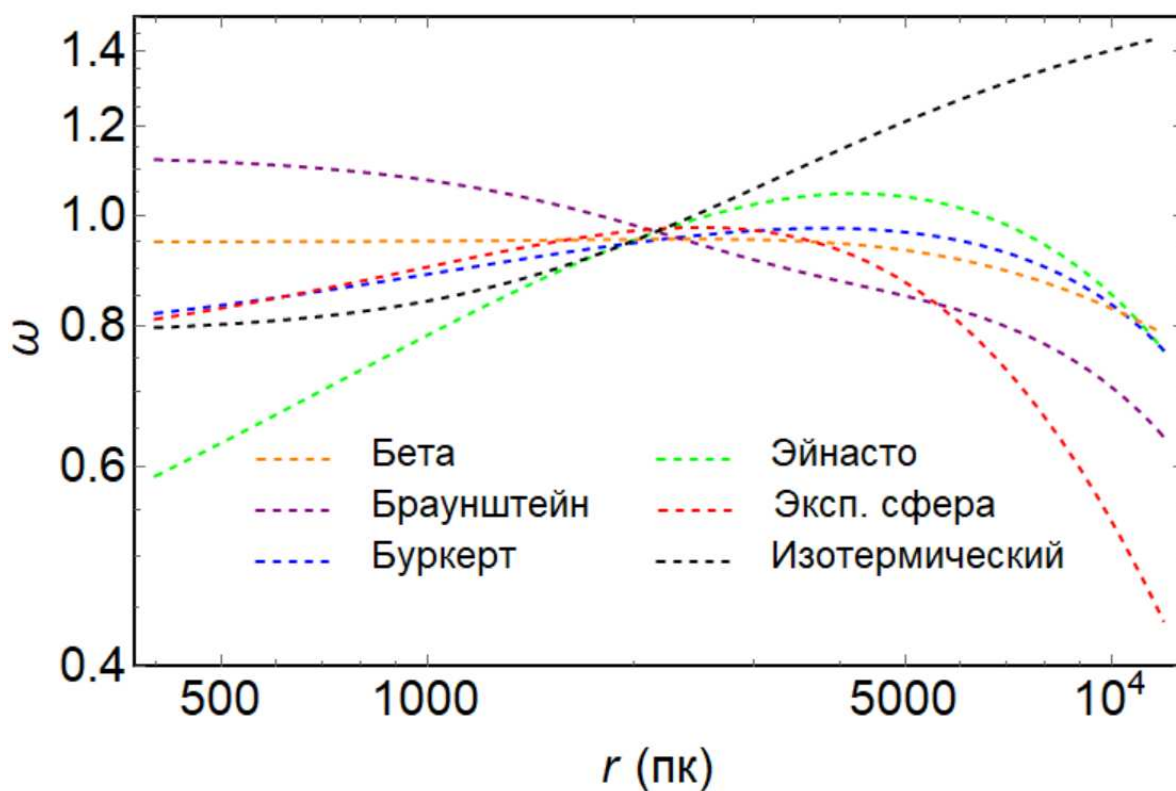


Рисунок 11 – Безразмерный параметр состояния  $\omega$  как функция радиальной координаты  $r$ . Обратите внимание, что значения ось  $y$  умножается на  $10^{-7}$

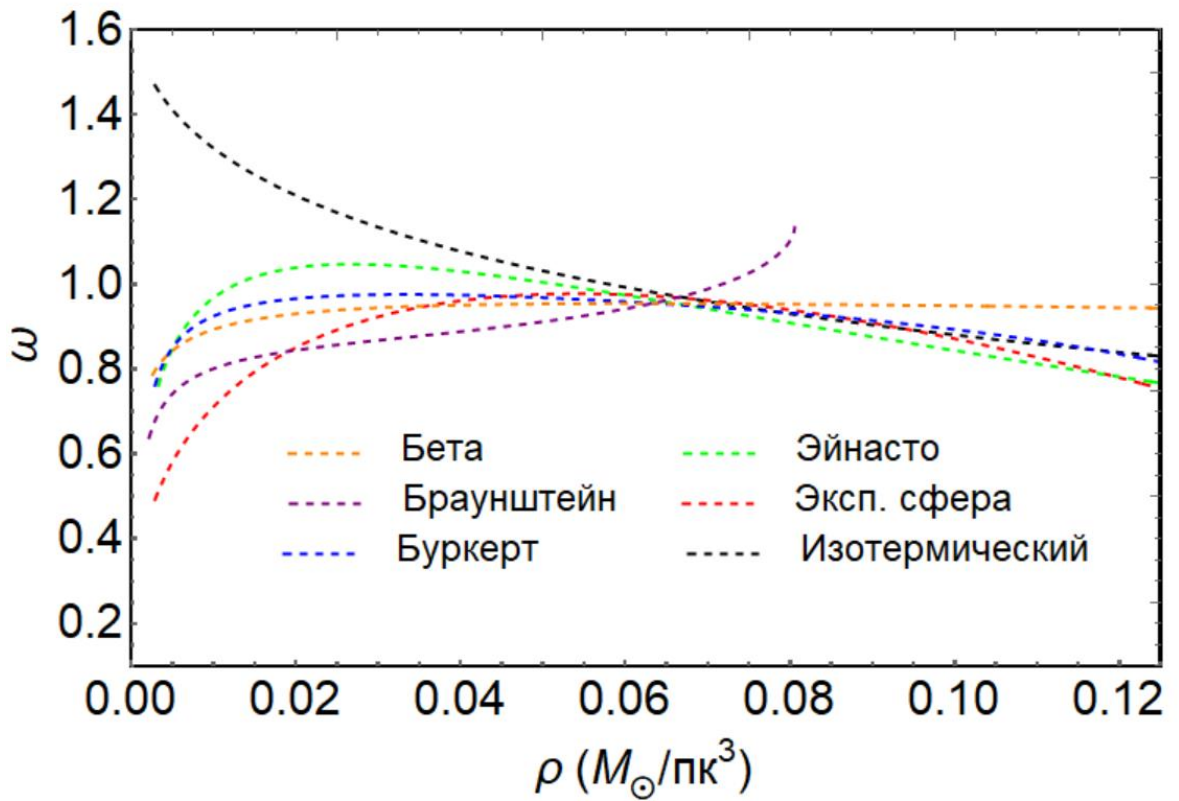


Рисунок 12 – Параметр безразмерного состояния  $\omega$  как функция плотности  $\rho$ .  
Обратите внимание, что значения ось у умножается на  $10^{-7}$

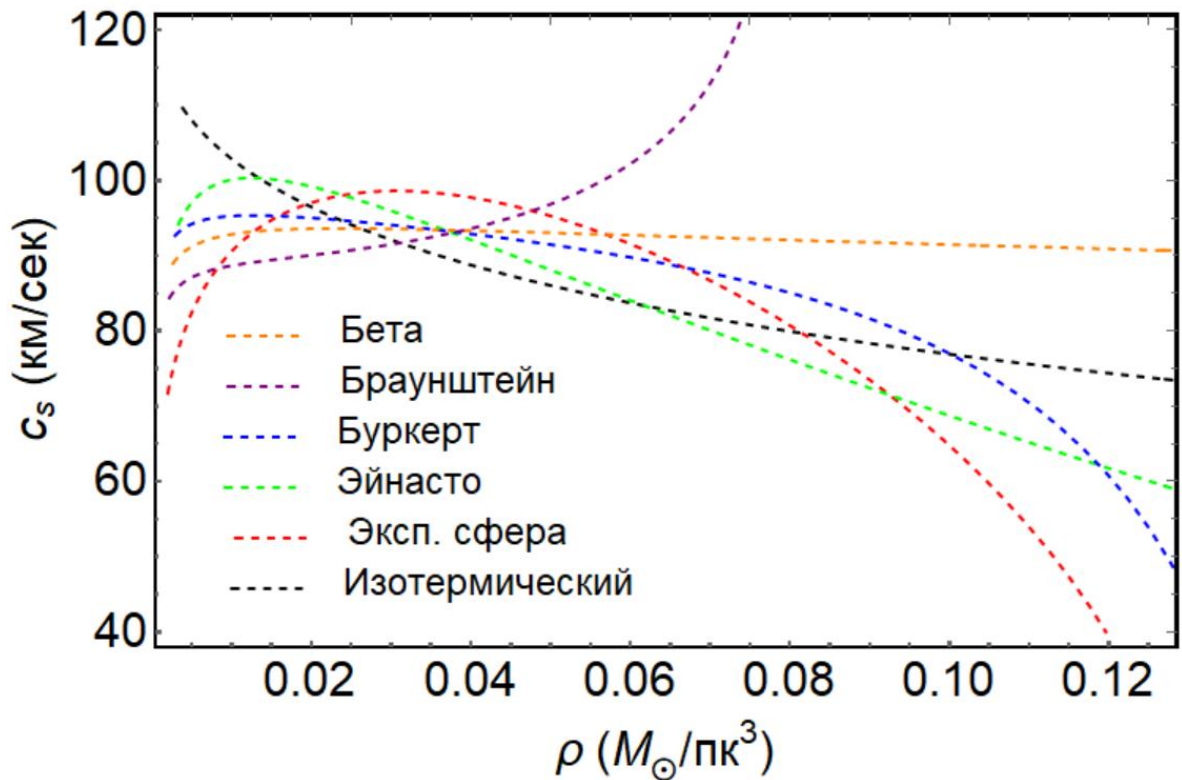


Рисунок 13 – Скорость звука в распределении тёмной материи для различных профилей

Интересно изучить общее поведение УС, включающее параметр состояния  $\omega$ . Следовательно, (2.8) может быть записано в терминах радиальной координаты  $r$ , либо плотности  $\rho$ , как показано на рисунке 12. Из этого следует, что  $\omega$  стремится к нулю для больших расстояний или низких плотностей, за исключением профиля Изо, где он становится постоянным. При малых расстояниях или высокой плотности  $\omega$  уменьшается или стремится к постоянному значению, за исключением профиля Браунштейна, который растет необычным образом, по крайней мере, в рассматриваемом диапазоне расстояний, предоставляемых наблюдательными данными КВ.

В наших расчетах также можно учесть поправки, предусмотренные общей теорией относительности. На больших расстояниях, когда  $\rho \ll \rho_0$ , изменениями можно пренебречь. Однако вблизи центральной части галактики ее отклонения от НГ были бы значительно заметны, поскольку поправки общей теории относительности к давлению явно намного больше, чем в НГ [45]. Что является следствием системы уравнений Толмана-Оппенгеймера-Волкова.

Кроме того, на рисунке 13 мы построили график скорости звука в соответствии с (2.9) для всех профилей. Особенностью ТМ является тот факт, что с увеличением плотности скорость звука уменьшается для всех профилей, кроме профиля Браунштейна, где верно обратное. Из космологии известно, что если скорость звука в центральной части распределения ТМ меньше, чем в его внешних частях, то это позволяет формировать крупномасштабные структуры [46]. Таким образом, можно заявить, что профиль Браунштейна не подходит для формирования галактик. Следовательно, этот профиль можно исключить.

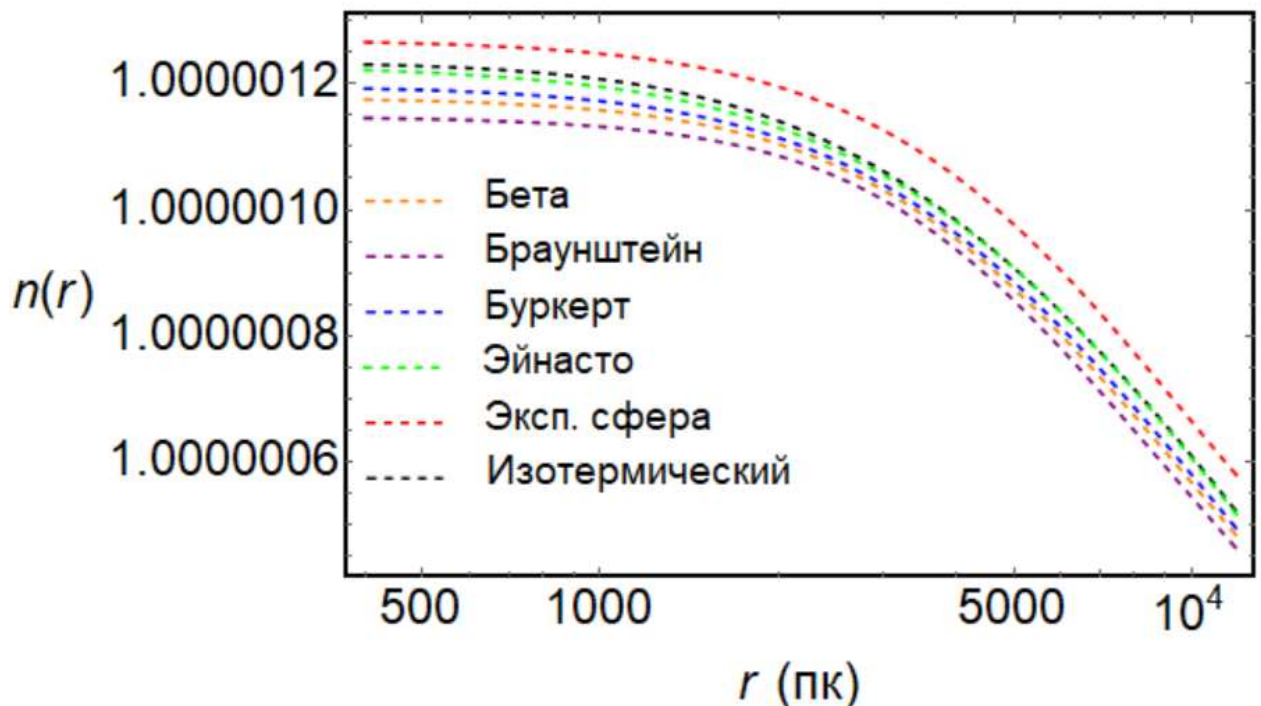


Рисунок 14 – Показатель преломления для тёмной материи в галактике U11454

Следует напомнить, что для Изо, экспоненциальной сферы, профилей Буркерта, Бета и Браунштейна  $\rho_0$  является центральной плотностью. Однако для профиля Эйнасто  $\rho_0$  является характеристической плотностью, а его центральная плотность равна  $\rho_0 e^{2\alpha}$ , как указано выше. Как видно из рисунка 13, поведение кривых скорости звука сильно отличается, некоторые из них резко меняются в зависимости от плотности. Наши результаты аналогичны результатам работы [35], для галактики.

Для рассмотренных выше профилей мы показали зависимость показателя преломления  $n$  от радиальной координаты в распределении ТМ на рисунке 14. Значение показателя преломления в гало невелико, как мы и ожидали. В области диска показатель преломления медленно растет в направлении центра галактики. В области ядра показатель преломления становится почти постоянным. Общее изменение показателя преломления крайне мало, менее одной части от  $10^6$ . Показатель преломления в вакууме немного меньше, чем в ТМ для всех профилей, которые мы использовали в пределах  $(0.4 - 11.9)_{\text{кпк}}$ , что соответствует наблюдательным данным КВ. В целом, показатель преломления может быть также использован для изучения процесса распространения света в эпоху доминирования ТМ [47].

## 2.4 Выводы по 2 разделу

Анализируя наблюдательные данные КВ спиральной галактики U11454, нами выведены свободные параметры моделей с помощью метода наименьших квадратов. Использовались хорошо известные профили плотности ядра ТМ из литературы [48] также для сравнения рассмотрели профили экспоненциальной сферы, Бета и Браунштейна. Профиль экспоненциальной сферы обычно применяется для изучения внутренних частей галактик [12, р. 118] и, по сути, для галактики U11454 он показал хороший результат, это видно из таблицы 7.

Из всех рассмотренных профилей, профиль Браунштейн имеет самое высокое значение БИК, а профиль изотермического профиля имеет самое низкое значение. То же самое верно и для  $\chi^2$ . Разница БИК между изотермическим профилем (с наименьшим значением) и профилем Браунштейна (с наибольшим значением) составляет  $\Delta\text{БИК} = 24$ , и это показывает веские основания против применения профиля Браунштейна для нашего анализа, т. е. профиль Браунштейна необходимо исключить из рассмотрения. Для профиля Эйнасто  $\Delta\text{БИК} = 9$ . Таким образом, для наших целей профили Эйнасто и изотермический являются наиболее подходящими профилями для изучения УС ТМ галактики U11454.

Изучая кривые для  $\rho(r)$ ,  $P(r)$ ,  $P(\rho)$ , было замечено, что поведение профилей похоже друг на друга, но вырождение среди профилей полностью нарушается, если посмотреть на диаграмму скорости звука. Здесь все профили различны. Как видно на рисунке 14, скорость звука для профиля Браунштейна ведет себя совершенно по-другому и не позволяет сформировать структуры.

В дополнение также рассчитали вириальный радиус и соответствующую массу. Для этого мы использовали условие, когда плотность равна критической плотности  $\rho_{\text{крит}} = 9.3 \times 10^{-30} \text{ г/см}^3$  [49] Вселенной, умноженной на 200. Вириальный радиус и соответствующая масса оказались больше, чем размер галактики, выведенный из КВ. Среди рассмотренных моделей изотермический профиль дал наибольшее значение, а экспоненциальный сферический профиль дал наименьший вириальный радиус и соответствующую массу.

Наш анализ показывает, что для рассматриваемой галактики изотермический профиль, профили Эйнасто и Буркерта являются лучшими моделями, поскольку они имеют наименьший БИК, чем профили экспоненциальной сферы, Бета и Браунштейна. В соответствии с недавними выводами [50] предположение о том, что УС ТМ не зависят от модели, оказалось частично верным только в ограниченном диапазоне плотностей.

Особенности ТМ, такие как уравнение состояния (параметр состояния), показатель преломления и скорость звука, зависят от принятых моделей. Если для уравнения состояния и показателя преломления различия крайне малы, то для скорости звука различия весьма заметны. Поэтому для изучения природы ТМ следует внимательно проанализировать профили ТМ, точно оценить значение БИК и тщательно изучить поведение скорости звука. Было бы также интересно продолжить исследования в этом направлении, включая вклад газа и диска, с учетом сложной структуры галактики [51].

### 3 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЯДРА-ГАЛО ТЁМНОЙ МАТЕРИИ В ГАЛАКТИКАХ

Проблема идентификации масс и взаимодействия частиц тёмной материи в настоящее время является одной из фундаментальных проблем физики и астрофизики. Первые космологические ограничения на массу частицы тёмной материи были в работах [52–56]. Некоторые выводы о массе частицы тёмной материи могут быть получены из общих соображений, основанных исключительно на квантовой статистике и гравитационном взаимодействии в масштабах галактики.

Важным открытым вопросом в астрофизике является описание тёмной материи в терминах бесстолкновительных массивных частиц [57]. Попытки были представлены, чтобы наложить ограничения на его плотность в фазовом пространстве, зная его эволюцию от космологического разделения до времени вириализации гало тёмной материи. Феноменологические попытки предлагались в прошлом, в терминах функций распределения Максвелла [58], Ферми – Дирака [59] и Бозе – Эйнштейна [60]. С 80-х годов и по настоящее время проблема моделирования распределения тёмной материи в терминах самогравитирующих квантовых частиц хорошо изучена и противопоставима с галактическими наблюдениями. В следующих работах [61–66] эта задача исследовалась путем рассмотрения статистики Ферми–Дирака в различных режимах: от полностью вырожденного до разбавленного, а также для различных масс фермионов от нескольких эВ до кэВ. Также в работах [67,68] та же проблема была проанализирована в терминах конденсата Бозе–Эйнштейна с массами частиц от  $10^{-25}$  эВ до нескольких эВ.

Попытки изучения галактических структур с точки зрения фундаментальных физических принципов, такие как термодинамика и статистическая физика, рассматриваются давно [69], поскольку галактики обладают многими квазиуниверсальными самоорганизованными свойствами. Например: постоянная средняя поверхностная плотность при длине шкалы в 1 гало для барионной и тёмной материи [70]; фундаментальная плоскость галактик [71,72]; или тот факт, что гало тёмной материи может хорошо соответствовать со множеством различных, но похожих профилей, которые напоминают сферы изотермического равновесия [73–75]. В рамках статистических и термодинамических подходов, наиболее актуальная проблема – это понимание сложных процессов релаксации, которые происходят прежде, чем галактическое гало будет в наблюдаемых нами стационарном состоянии. В контексте данного раздела будут рассмотрены галактики только с (квази) расслабленным состоянием галактики. В целях аналогии с используемой здесь гипотезой, процесс релаксации безусловно, следует рассматривать в виде бесстолкновительной релаксации, что дает невзаимодействующую природу тёмной материи в гало. Формально такой релаксационный процесс отличается от стандартной столкновительной релаксации тем, что последняя описывается уравнением Фоккера – Планка, тогда как первый должен описываться уравнением Власова – Пуассона, чтобы учесть пространственные и временные



вариации общего гравитационного потенциала, не включенные в столкновительный подход [69]. Процессы столкновительной релаксации могут применяться в шаровых скоплениях (с преобладанием звездного компонента) подразумевая время релаксации  $t_R$  порядка или меньше возраста Вселенной. Если применить ее к галактикам, эти процессы в значительной степени не актуальны, потому что  $t_R$  на порядки превышает 10 млрд лет. Показано, что изменяющийся во времени гравитационный потенциал бесстолкновительного процесса, известного как вынужденная релаксация [76–78], ослабляет механизм, аналогичный столкновениям в газе, но с ассоциированной динамической шкалой времени, который намного короче  $t_D \ll t_R$ ; что даёт возможность заняться проблемой релаксации в галактиках. Главным результатом этой теории является то, что в течение нескольких временных интервалов  $t_D$ , бесстолкновительная система квазирелаксирует в чрезвычайно долгоживущее квазистационарное состояние, которое в условиях хорошего смешения можно описать в терминах статистики Ферми-Дирака, показанная в работах [76,79,80]. Несмотря на то, что распределение Ферми – Дирака было впервые получено более подробно в [76], та же статистика была получена более фундаментально, с точки зрения частиц, как различимых [79] или неразличимых фермионных частиц [77,80], как и те, которые интересуют нас.

Модели основанные на самогравитирующих фермионах, которые находятся в состоянии равновесия, предполагается что их распределения находятся всюду в классическом разбавленном в [74], могут иметь серьезные проблемы стабильности при применении к галактическим структурам, таким как большие спирали. Несмотря на то, что модель такого рода обеспечивает хорошее соответствие по сравнению с кривыми вращения наблюдений и профилями плотности [6, p.1], эти профили, скорее всего, претерпевают коллапс ядра, что является неизбежной судьбой распределений на основе статистики Больцмана и представляют большой контраст плотности между центром и периферией, даже в случае бесстолкновительных частиц [66,80]. Напротив, для самогравитирующих систем бесстолкновительных частиц, которые развивают некоторую степень центрального вырождения, так что общий разбавленный режим больше не предполагается (т.е. для  $\theta_0 \gtrsim 10$  в модели PAP), коллапс ядра может быть остановлен, в основном потому, что присутствующий сейчас принцип исключения насыщает гравитационный коллапс [63,66].

В фермионном случае четкое дифференцирование квантового вырожденного ядра и почти классического гало, никогда не были правильно реализованы. В частности, не учитывалась решающая роль сравнения и противопоставления различных конфигураций, для фиксированных граничных условий гало. Как будет показано в дальнейшем, это приводит к очень специфической проблеме собственных значений для массы иннов. Ино с итальянского языка означает «маленький». Ино – это частицы с невероятно маленькой массой, фактически мы не знаем существуют ли частицы с такой

массой. В данной модели РАР предполагают, что используя статистику Ферми-Дирака и подбирая массу таким образом, чтобы они были в пределах 48-356 кэВ можно объяснить кривую вращения галактики Млечный Путь.

В этом разделе и для полноты картины сформулированы общие задачи о распределении тёмной материи в галактиках, основанные на следующих предположениях: (1) фазовая плотность тёмной материи описывается статистикой Ферми – Дирака; (2) что уравнения равновесия для конфигураций решаются в рамках общей релятивистской трактовки; (3) устанавливаются граничные условия для всех профилей тёмной материи, связанных с определенным типом галактик (карлики, спирали), чтобы иметь в каждом случае одно и то же значение кривой вращения. Установив процедуру описанную в подразделе 3.1, и в подразделе 3.3 доказываем, что: (а) новое распределение плотности ядра-гало тёмной материи, состоит из плотного компактного ядра, регулируемое почти вырожденной квантовой статистикой, полувырожденным переходом, сопровождаемый разбавленным галом, и управляемый классической статистикой Больцмана; (б) для каждого параметра центрального вырождения определяется как задача о собственных значениях, массы и радиусы внутреннего кванта гало, а также соответствующая ему масса ино; и (в) показывается, что, для массы ино  $\sim 10 \text{кэВ}/c^2$  в модели РАР существует теоретическая корреляция между массой внутреннего квантового ядра и массой гало, для галактик от карликовых до спиральных. Из этих соображений ясно следует, что определение массы ино однозначно определяется свойствами внутреннего квантового ядра и асимптотическими граничными условиями, и оно не может быть определено в распределении тёмной материи, подчиняющееся только статистике Больцмана, которое не зависит от массы ино. В подразделе 3.4 подводятся итоги и обсуждаются результаты для данного раздела.

### **3.1 Уравнения равновесия и граничные условия**

Вслед за [81] и [82] здесь рассматривается система общих релятивистских самогравитирующих массивных фермионов в приближении термодинамического равновесия. Как упоминалось выше, эта аппроксимация хорошо обоснована в предположении перемешивания в процессе бесстолкновительной релаксации, когда общая функция распределения ино в квазистационарном состоянии, может быть хорошо аппроксимировано распределением Ферми-Дирака. Изначально не предполагаются никакие дополнительные взаимодействия для фермионов помимо выполнения квантово-подобной статистики и релятивистских уравнений гравитации. В частности, не предполагается, что частицы слабо взаимодействуют, как в [56]. Эти частицы в более общем смысле были названы как ино, оставляя возможность дополнительных фундаментальных взаимодействий, определяемых дальнейшими требованиями, которые должны быть выполнены моделью. Такое рассмотрение фермионов приводит к новому классу равновесных

конфигураций и, соответственно, к новым ограничениям на массу ино. Это необходимый первый шаг в связи с окончательным подходом, включающим дополнительные взаимодействия, которые должны быть обработаны самостоятельно и последовательно.

Плотность и давление фермионной системы определяются следующими выражениями [83]:

$$\rho = m \frac{2}{h^3} \int f(p) \left[ 1 + \frac{\varepsilon(p)}{mc^2} \right] d^3 p \quad (3.1)$$

$$P = \frac{1}{3} \frac{2}{h^3} \int f(p) \left[ 1 + \frac{\varepsilon(p)}{mc^2} \right]^{-1} \left[ 1 + \frac{\varepsilon(p)}{2mc^2} \right] \varepsilon d^3 p \quad (3.2)$$

где интегрирование ведется по всему импульсному пространству,  $f_p = (\exp[(\varepsilon - \mu)/kT] + 1)^{-1}$  - функция распределения,  $\varepsilon = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} - mc^2$  - кинетическая энергия частицы,  $\mu$  - химический потенциал с вычетом энергии покоя частицы,  $T$  - температура,  $k$  - постоянная Больцмана,  $h$  - постоянная Планка,  $c$  - скорость света,  $m$  - масса частицы ино. В данной работе не учитывается наличие антифермионов, т. е. рассматриваются температуры  $T \ll mc^2/k$ . Полный набор (функциональных) параметров модели определяется значениями температуры, вырождения и обрезки,  $\beta = kT/(mc^2)$ ,  $\theta = \mu/(kT)$  и  $W = \varepsilon_c/(kT)$ , соответственно.

Систему была принята сферически-симметричной, поэтому метрика записывается в следующем виде [84]:

$$dS^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.3)$$

здесь  $(r, \theta, \phi)$  - сферические координаты, где  $\nu$  и  $\lambda$  зависят от радиальной координаты  $r$ , вместе с термодинамическим условием Толмана и Клейна:

$$e^{\nu/2} T = const, \quad (3.4)$$

$$e^{\nu/2} (\mu + mc^2) = const. \quad (3.5)$$

Условие предельного значения вытекает из сохранения энергии вдоль геодезической,

$$e^{\nu/2} (\varepsilon + mc^2) = const, \quad (3.6)$$

где  $\nu_b \equiv \nu(r_b)$  метрическая функция на границе конфигурации, т. е.  $W(r_b) = \varepsilon_c(r_b) = 0$  [85] и  $r_b$  является граничным радиусом, часто называемым приливным радиусом. Приведенная выше формула обрезки сводится к известному условию космической скорости  $\nu_e^2 = -2\phi$  в классическом пределе

$c \rightarrow \infty$  ( $e^{v/2} \approx 1 + \phi/c^2$ ), где  $V = m\phi$  с  $\phi$  - ньютоновский гравитационный потенциал, принимая во внимание  $V(r_b) = 0$ .

Вышеуказанные условия вместе с уравнениями Эйнштейна приводят к равновесной системе:

$$\frac{d\hat{M}}{d\hat{r}} = 4\pi\hat{r}^2\hat{\rho}, \quad (3.7)$$

$$\frac{d\theta}{d\hat{r}} = -\frac{1 - \beta_0(\theta - \theta_0)}{\beta_0} \frac{\hat{M} + 4\pi\hat{P}\hat{r}^3}{\hat{r}^2(1 - 2\hat{M}/\hat{r})}, \quad (3.8)$$

$$\frac{dv}{d\hat{r}} = \frac{2(\hat{M} + 4\pi\hat{P}\hat{r}^3)}{\hat{r}^2(1 - 2\hat{M}/\hat{r})}, \quad (3.9)$$

$$\beta(\hat{r}) = \beta_0 e^{\frac{v_0 - v(\hat{r})}{2}} \quad (3.10)$$

$$W(\hat{r}) = W_0 + \theta(\hat{r}) - \theta_0 \quad (3.11)$$

В пределе  $W \rightarrow \infty$  (т.е.  $\varepsilon_c \rightarrow \infty$ ) эта система сводится к уравнениям, модели РАР [83, p.1770].

Для модели РАР были включены следующие безразмерные величины:

$$\hat{r} = r / \chi, \quad (3.12)$$

$$\hat{M} = GM / (c^2 \chi), \quad (3.13)$$

$$\hat{\rho} = G\chi^2 \rho / c^2, \quad (3.14)$$

$$\hat{P} = G\chi^2 P / c^4, \quad (3.15)$$

здесь  $\chi = 2\pi^{3/2}(\hbar/mc)(m_p/m)$  где  $m_p = \sqrt{\hbar c/G}$  - масса Планка. Постоянные условия Толмана и Клейна вычисляются в центре при  $r = 0$ , и их значения обозначены нижним индексом «0».

На рисунках 15 и 16 показаны результаты численного интегрирования для радиального поведения свободных параметров модели РАР для выбранной массы фермиона  $mc^2 = 48 \text{ кэВ}$ .

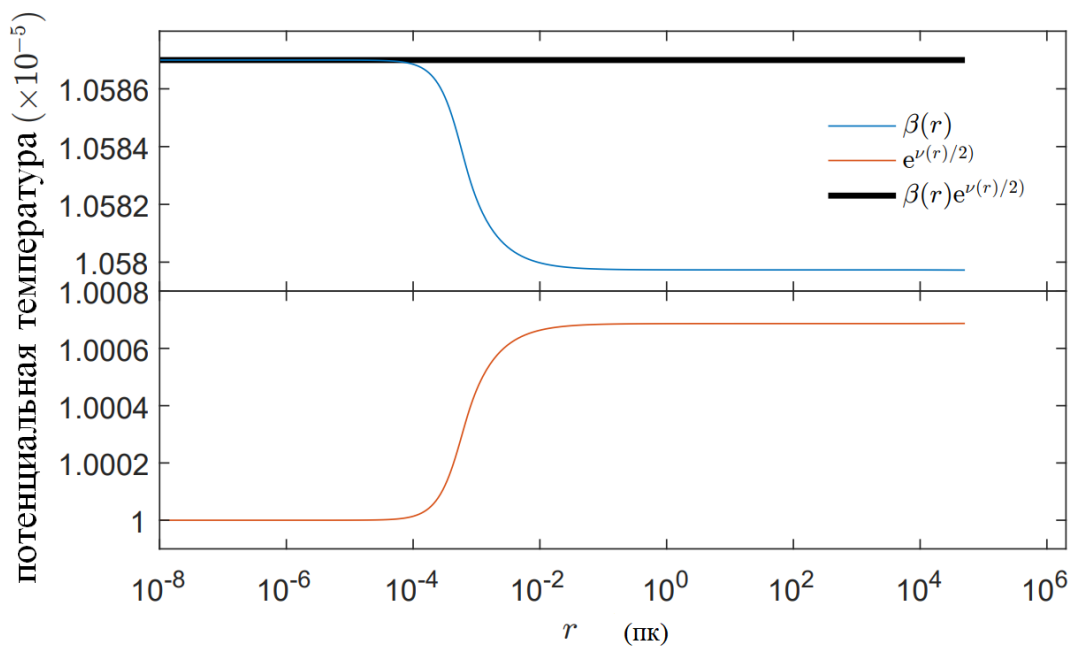


Рисунок 15 – Верхняя панель: температурный параметр  $\beta$  в зависимости от радиального расстояния  $r$  для массы фермиона  $mc^2 = 48 \text{ кэВ}$  и граничных условий гало, взятых из наблюдений и график температуры гравитационного красного смещения  $e^{\nu/2}\beta$ . Нижняя панель: гравитационный потенциал  $e^{\nu/2}$

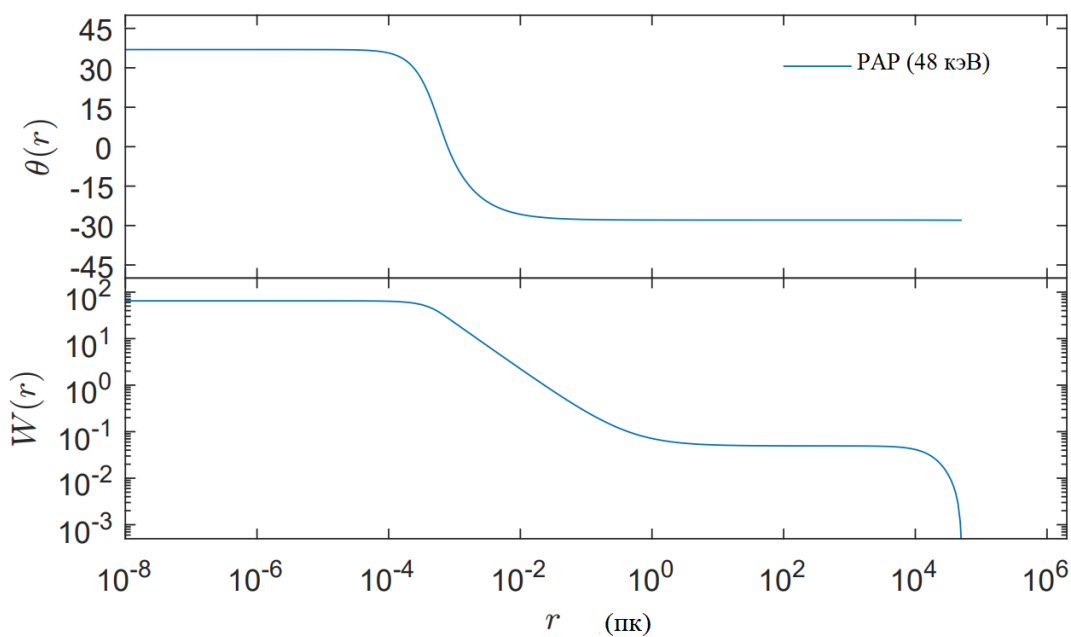


Рисунок 16 – Верхняя панель: Параметр вырождения  $\theta$ , как функция радиального расстояния  $r$ , для массы фермиона  $mc^2 = 48 \text{ кэВ}$  и разрешенных граничных условий гало. Нижняя панель: соответствующий параметр предельного значения  $W$

На рисунке 15 показан температурный параметр  $\beta$  как функция радиального расстояния  $r$  с массой фермиона  $mc^2 = 48 \text{ кэВ}$ . Также мы построили график гравитационной температуры с красным смещением  $e^{v/2}\beta$ , которая постоянна во всей конфигурации, как того требует условие термодинамического равновесия в подразделе 3.2. Для полноты показывается гравитационный потенциал  $e^{v/2}$  в зависимости от радиального расстояния  $r$ , из которого можно увидеть, что температура выше, там, где гравитационный потенциал глубже.

На рисунке 16 показан параметр вырождения  $\theta$  в зависимости от  $r$  для массы фермиона  $mc^2 = 48 \text{ кэВ}$  и для заданных граничных условий гало, взятых из наблюдений. Можно увидеть три различных режима по всей Галактике: вырожденное квантовое ядро (положительные значения  $\theta$ ), переход от положительных значений к отрицательным, где квантовые поправки все еще важны, и, наконец, область отрицательных значений, соответствующая режиму Больцмана.

Для той же массы фермиона, на рисунке 16 показывается параметр предельного значения как функции  $r$ . На этом рисунке хорошо видна граница Галактики, введенная обрезкой.

С помощью общих характеристик параметров физической модели РАР, показанных на приведенных выше рисунках, можно заметить, что распределение плотности ТМ (рисунок 17), в целом, показывает разделение трех физических режимов:

1. внутреннее ядро с радиусом  $r_c$  почти постоянной плотности, управляемое квантовым вырождением (см. область высоких положительных значений параметра вырождения на рисунке 16);

2. промежуточная область с резко уменьшающимся распределением плотности, за которой следует расширенное плато, где количественные поправки все еще важны (см. область перехода от положительных к отрицательным значениям параметра вырождения на рисунке 16);

3. плотность распределения Больцмана (см. сильно отрицательные значения параметра вырождения на рисунке 16) показывает поведение  $\rho \propto r^{-n}$  с  $n > 2$  из-за ограничения предельного значения.

Действительно, использование фермионной статистической обработки оправдано во всем семействе внутренних ядер, проанализированных здесь для Галактики, поскольку они удовлетворяют условию  $\lambda_B \gtrsim 3l_c$ , где  $l_c \sim n_c^{-1/3}$  - среднее расстояние между частицами в ядре (с  $n_c$ - плотность частиц в ядре) и  $\lambda_B = h/(2\pi m k T_c)^{1/2}$  тепловой длины волны де-Бройля в ядре.

Различные режимы в профилях  $\rho(r)$  на кривой вращения ТМ (рисунок 18):

1. линейно возрастающая круговая скорость, достигающей первый максимум при радиусе квантового ядра  $r_c$ ;

2. Кеплеровское поведение уменьшения  $v_{TM} \propto r^{-1/2}$ , представляющее переход от квантового вырождения к режиму разряжения, продолжающейся тенденции  $v_{TM} \propto r$  до достижения второго максимума при  $r_h$ , который был принят за длину масштаба 1 гало в модели РАР;

3. убывающее поведение, плотности по степенному закону  $\rho \propto r^{-n}$  (при  $n > 2$ ).

На рисунке 17 пунктирные синие линии указывают положение звезд S-скопления [86]. Для сравнения показан профиль плотности НФУ, полученный в [12, р. 118] (пунктирная чёрная кривая).

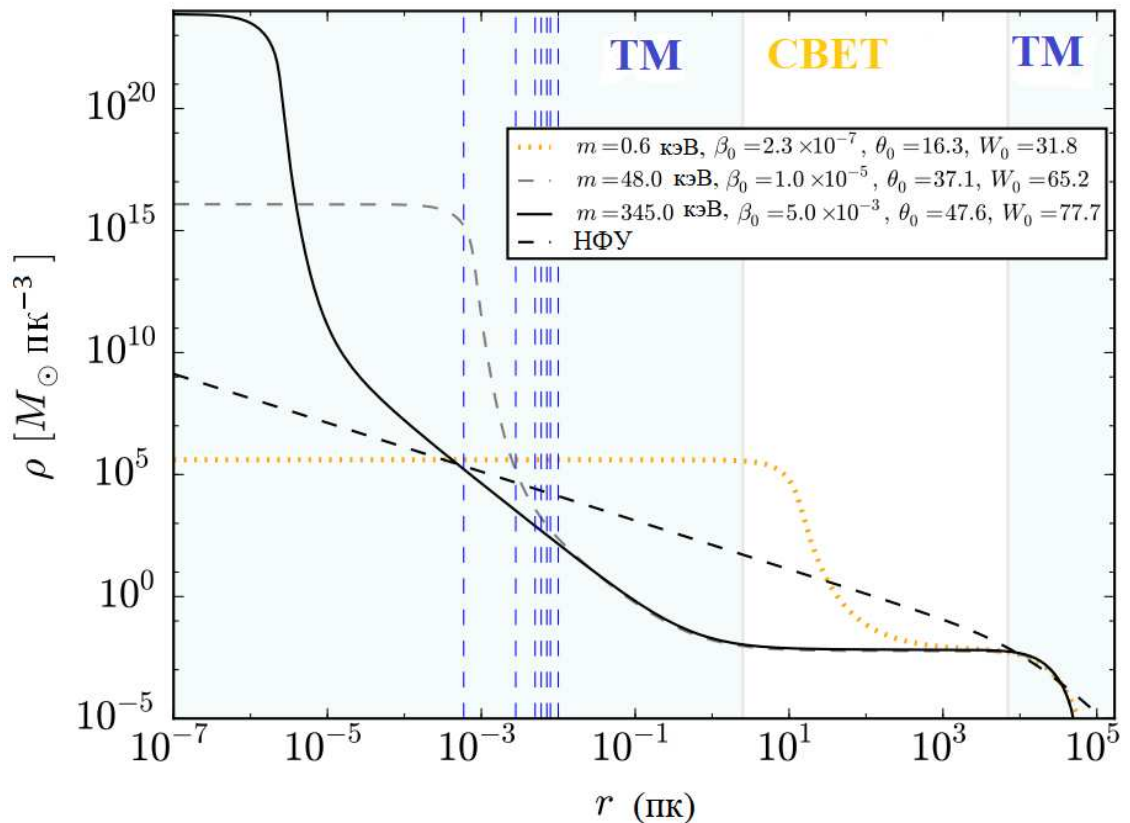


Рисунок 17 – Теоретические профили плотности от  $10^{-7} \text{ пк}$  до  $10^5 \text{ пк}$  для трех показательных масс фермионов в области  $mc^2 \sim \text{кэВ}$ :  $0.6 \text{ кэВ}$  (пунктирная желтая кривая),  $48 \text{ кэВ}$  (серая пунктирная кривая) и  $345 \text{ кэВ}$  (сплошная чёрная кривая).

Вышеупомянутое более общее распределение плотного квантового ядра-классического гало возникает, как следствие включения конечных температурных эффектов вместе с возможностью для фермионов приобретать положительные значения параметра вырождения в центральных областях равновесных конфигураций.

Тот факт, что фермионы включены во внешнее гравитационное поле, автоматически приводит к радиальному градиенту вырождения, приводящему к сильно вырожденному и компактному ядру в центре, за которым следует резкий переход к более разбавленному и расширенному классическому распределению, подобному распределению Больцмана.

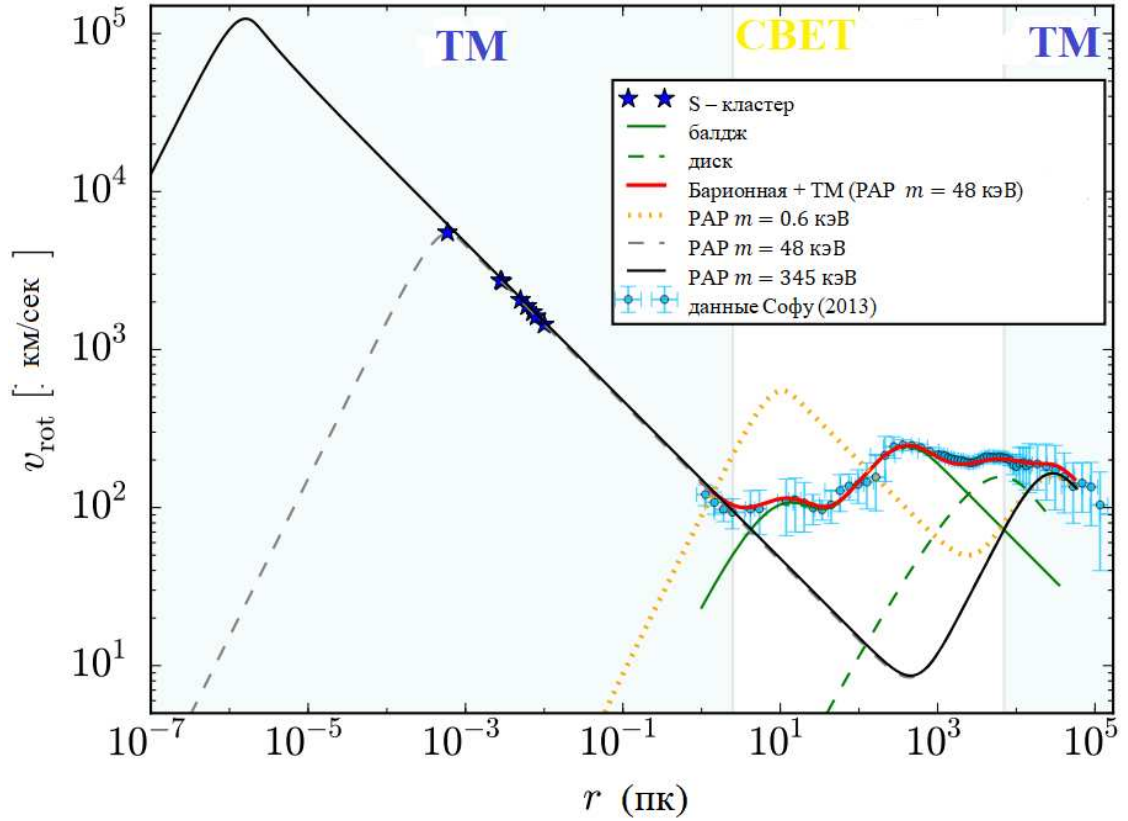


Рисунок 18 – Теоретические кривые вращения Рuffини-Аргельес-Рueda  $10^{-7}$  пк до  $10^5$  пк для трех показательных масс фермионов в области  $mc^2 \sim \text{кэВ}$ :  $0.6 \text{ кэВ}$  (пунктирная желтая кривая),  $48 \text{ кэВ}$  (пунктирная серая кривая) и  $345 \text{ кэВ}$  (сплошная чёрная кривая).

Важно подчеркнуть, что эти результаты заметно отличаются от результатов, описывающих гало, исключительно сильной вырожденной конфигурацией или исключительно классической, подобной Больцману [87]. Оба режима существуют внутри галактики. Аналогичная структура ядро-гало, подчиняющаяся функции распределения, подобной Ферми–Дираку возникает как наиболее вероятный конечный результат механизмов безстолкновительной релаксации [76,88–90].

Систёмные переменные:  $[M(r), \theta(r), \beta(r), v(r)]$ . Интегрируя уравнения (3.7)–(3.11) при заданных начальных условиях в центре  $r = 0$ , для соответствия наблюдаемой массе гало тёмной материи  $M(r = r_h) = M_h$  и радиус  $r_h$ , определенные в модели РАР в начале кривых вращения. Так называемый



радиус гало представлены, как длина в масштабе 1 гало, связанные с фермионной моделью, представленной здесь, и соответствующее изменение профилей плотности в полной аналогии с другими длинами гало, такими как  $r_0$  или  $r_{-2}$  как показано на рисунке 24. Круговая скорость:

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r - 2GM(r)c^2}}, \quad (3.16)$$

где  $r = r_h$ ,  $v(r = r_h) = v_h$ .

Интересно, что очень похожая система уравнений была повторно выведена в [66] явно игнорируя теоретический подход, уже реализованный в 1990 г. в [81, p.5]. Они интегрировали уравнения Эйнштейна фиксирующих массу ино  $m = 15 \text{ кэВ}/c^2$ , и они получили семейство профилей плотности для различных значений центрального параметра вырождения при фиксированной температуре, согласованных с асимптотической круговой скоростью  $v_\infty = 220 \text{ км/сек}$ . Они заключили, что самогравитирующая система, такая как ино могла бы предложить альтернативу толкованию массивной чёрной дыры в ядре Sgr A\* [91]. Несмотря на то, что этот результат был возможен, он был заменен новыми ограничениями, накладываемыми дальнейшими ограничениями наблюдений на траекторию S-звезд, таких как S1 и S2 [86,91].

В данной работе уделяется особое внимание граничным условиям гало, определяемым через кривые вращения. Интегрируя систему уравнений (3.8)-(3.11), которая использует граничные условия, отличного от введенного в [66], привело к разным выводам. Сначала мы применили эту модель к типичным спиральным галактикам, подобным PАР, приняв параметры гало тёмной материи, следующим образом [75,92]:

$$r_h = 25 \text{ кпк}, v_h = 168 \text{ км/сек}, M_h = 1.6 \times 10^{11} M_\odot. \quad (3.17)$$

Решения по плотности сравнивают с изотермической сферой Больцмана с теми же свойствами гало. Все конфигурации при любом значении  $\theta_0$  и соответствующем  $m$  сходятся для  $r \gtrsim r_h$  к классическому изотермическому распределению Больцмана. Оно так же как и распределение Больцмана, также не зависит от  $m$ .

Позже этот анализ повторили также для типичных карликовых сфероидальных галактик:  $r_h = 0.6 \text{ кпк}$ ,  $v_h = 13 \text{ км/сек}$ ,  $M_h = 2 \times 10^7 M_\odot$  [93]; а также для типичных больших спиральных галактик:  $r_h = 75 \text{ кпк}$ ,  $v_h = 345 \text{ км/сек}$ ,  $M_h = 2 \times 10^{12} M_\odot$  [94]. Внутренние условия  $M(0) = 0$ ,  $v(0) = 0$ ,  $\theta(0) = \theta_0$ ,  $\beta(0) = \beta_0$ . Интегрируем уравнения (3.7)-(3.10) для выбранных значений  $\theta$  и  $m$ , соответствующие различным вырожденным состояниям газа в центре конфигурации.

Также на рисунке 20 показан профиль плотности и кривые вращения в зависимости от расстояния для широкого диапазона параметров  $(\theta_0, m)$  для граничных условий в (3.17) выполнен с высокой точностью.

### 3.2 Применение к Млечному Пути

Основываясь на приведенной выше морфологической структуре, мы принимаем в качестве граничных условий массу гало ТМ с наблюдаемым значением в двух разных радиальных точках Галактики: масса гало ТМ  $M(r = 40 \text{ кпк}) = 2 \times 10^{11} M_{\odot}$ , что согласуется с динамикой внешнего гало ТМ [83, р.1770], а также пункт (а) ниже), и  $M(r = 12 \text{ кпк}) = 5 \times 10^{10} M_{\odot}$ , как указано в [12, р. 118]. Также требуется квантовое ядро массой  $M(r = r_c) \equiv 4,2 \times 10^6 M_{\odot}$  заключенный в радиусе  $r_c = r_{p(S2)} = 6 \times 10^{-4} \text{ пк}$  перицентра звезды S2 [86]. Это подразумевает три граничных условия для трех центральных параметров свободной модели РАР.

Рассмотрим расширенные данные кривой вращения Млечного Пути с высоким разрешением в [12, р. 118], начиная от пк и заканчивая  $10^2 \text{ кпк}$ , вместе с орбитальными данными 8 наиболее разрешенных звезд S-скопления, взятые из [86]. Таким образом, данный анализ будет охватывать в общей сложности более 9 порядков радиальной протяженности. Согласно [12, р. 118], компоненты вещества Галактики могут быть разделены на 4 независимых закона распределения масс, управляемых различной кинематикой и динамикой:

1. центральный ( $10^{-3} \lesssim r \lesssim 10^4$ ) пк, состоящий из молодых S-звезд и молекулярного газа, в соответствии с законом Кеплера  $v \propto r^{-1/2}$ , динамика которых определяется темным и компактным объектом массой  $M_c \approx 4 \times 10^6 M_{\odot}$  с центром в Sgr A\*;

2. промежуточная сфероидальная структура балджа ( $3 \lesssim r \lesssim 10^3$ ) пк, состоящая в основном из более старых звезд и представляющая максимальный скачок на кривой скорости  $v \approx 250 \text{ км/сек}$  при  $r \sim 0,4 \text{ кпк}$ , с внутренним и основным распределением масс, объясняемым экспоненциальной моделью сферы:

$$\rho(r) = \rho_c e^{-r/a_b} \quad (3.18)$$

3. удлинённый плоский диск ( $10^3 \lesssim r \lesssim 10^4$ ) пк, включающий звездообразующие области, пыль и газ, плотность поверхностной массы которых описывается экспоненциальным законом:

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 e^{-R/a_d}, \quad \Sigma_0 = M_d / (2\pi a_d^2) \quad (3.19)$$

где  $M_d$  общая масса диска [12, р. 118] (для значений средней плотности ( $\rho_c, \Sigma_0$ ) и соответствующим увеличением длины ( $a_b, a_d$ ) каждой барионной модели (балдж+диск);

4. в сферическом гало ( $10^4 \lesssim r \lesssim 10^5$ ) пк преобладают ТМ и представляя пик скорости в  $v \approx 160 \text{ км/сек}$  на расстоянии  $r \sim 30 \text{ кпк}$ , за которым следует уменьшение плотности, более крутой, чем  $r^{-2}$ .

Следуя стандартному предположению о том, что барионы и ТМ не взаимодействуют друг с другом, мы рассчитали общую кривую вращения как:

$$v_{rot} = \sqrt{r \frac{d\Phi}{dr}} = \sqrt{v_b^2(r) + v_d^2(r) + v_{TM}^2(r)}, \quad (3.20)$$

где

$$\Phi_T = \Phi_b + \Phi_d + \Phi_{TM} \quad (3.21)$$

есть общий гравитационный потенциал, создаваемый суммой каждого компонента и  $v_b^2(r)$ ,  $v_d^2(r)$  барионные квадраты круговых скоростей. Рассчитана общая (внутренняя + основная) круговая скорость балджа, используя те же параметры модели массы, что и в [86]. Для диска были выполнены расчеты с параметрами массовых моделей ( $M_d, r_d$ ), несколько измененными по сравнению с параметрами, приведенными в [12, р. 118], где предполагался профиль НФУ. Такие незначительные изменения подразумевают сдвиг скорости диска до 15% по отношению к модели скорости диска, используемой в [12, р. 118], что соответствует максимуму отклонения  $\sim 20 \text{ км/сек}$ . Наконец, в  $v_{TM}^2(r)$  вклад ТМ, вычисленный численно из  $M(r)$  решения (3.7)–(3.10), с помощью общей релятивистской формулы для скорости (3.16) согласно уравнениям движения пробной частицы в метрике пространства-времени (3.3).

Далее обсудим результаты численного интегрирования с учетом граничных условий для случая Млечного Пути в рамках модели РАР. Ключевым результатом является то, что существует непрерывное базовое распределение ТМ, охватывающее всю наблюдаемую протяженность Галактики, которое управляет не только динамикой внешнего гало ( $r \gtrsim 10 \text{ кпк}$ ), но и центральными областями Галактики ( $r \lesssim 1 \text{ пк}$ ), в то время как в промежуточной области ( $1 \text{ пк} \lesssim r \lesssim 10 \text{ кпк}$ ) преобладают барионные компоненты (балдж + диск).

На рисунке 17 показаны профили плотности РАР от  $10^{-7} \text{ пк}$  до  $10^5 \text{ пк}$  для трех значений массы фермиона: (пунктирная серая кривая) и  $345 \text{ кэВ}/c^2$  (сплошная чёрная кривая). Пунктирные синие линии указывают положение звезд с наилучшим разрешением в скоплении S [86]. Для сравнения показан профиль плотности НФУ [12, р. 118] (пунктирная чёрная кривая). Обобщенный профиль НФУ также может быть использован для сравнения с более поздними результатами, учитывая, что эти феноменологические профили были недавно

использованы, и было показано, что они хорошо описывают кривую вращения Млечного Пути [95].

Поведение самого внешнего гало ТМ для Млечного Пути подвергается условиям обрезки:  $W(r_b) \approx 0$ , когда  $\rho(r_b) \approx 10^{-5} M_{\odot}/\text{пк}^3$ , при граничном радиусе  $r_b = 50 \text{ кпк}$  (см. рисунок 17); с  $\rho(r_b)$  плотностью локальной группы, как указано в [96]. Отметим, что точное условие обрезки  $W(r) = 0$  выполняется в предельном случае  $\rho(r) = 0$ , достигнутом для  $r \gtrsim r_b$ . Предельное поведение такого профиля плотности ТМ также согласуется с массой гало ТМ  $M_{TM}(r = 40 \text{ кпк}) = 2 \times 10^{11} M_{\odot}$ , как требовалось выше, что дополнительно подразумевает общую массу Галактики (тёмную + барионную) при  $r_b$   $M_T(r_b) \approx 3 \times 10^{11} M_{\odot}$ , из которых 80% составляет ТМ в соответствии с моделью РАР (т.е.  $M_{TM}(r_b) = 2,4 \times 10^{11} M_{\odot}$ ). Ясно, что такое распределение массы ТМ должно также соответствовать динамическим ограничениям, установленным наблюдениями за карликами галактического спутника, например, карликовым спутником Стрельца. Действительно, такие ограничения для наблюдений были недавно рассмотрены в [97], которые показали, что для их выполнения требуется общая масса Галактики (достоверность ~80%)  $M_T(r \geq 50 \text{ кпк}) \approx 3 \times 10^{11} M_{\odot}$ .

На рисунке 18 показаны кривые вращения модели РАР в том же радиальном расстоянии и для тех же трех представленных значений массы фермиона на рисунке 17. Для вышеуказанных трех масс показан вклад фермиона ТМ в общую кривую вращения, а для случая  $mc^2 = 48 \text{ кэВ}$  - общая кривая вращения (красная кривая), включая общий барионный (балдж + диск) компонент. Из этих трех приведенных примеров можно непосредственно видеть, что только решения РАР с массами частиц в диапазоне  $mc^2 = 48 - 345 \text{ кэВ}$  согласуются с наблюдаемыми в Млечном Пути в области  $r \sim 10^{-3} - 10^{-5} \text{ пк}$ , где имеются данные. Это те, которые способны обеспечить альтернативу сценарию ЧД в Sgr A\*. Символы синих звезд представляют звезды с наилучшим разрешением S-скопления [86], и их положение на графике было оценено как эффективная круговая скорость в периферии, т.е. без учета эллиптичности орбит.

Далее на рисунке 19 показан рисунок 18 с увеличенным масштабом (наиболее подходящие кривые) в области 1-35 кпк и в линейном масштабе. Это позволяет лучше оценить разницу между различными моделями ТМ в радиальном промежутке, где кривая вращения наиболее подходящая. Таким образом, рисунок 19 сравнивает кривую вращения [барион + ТМ] с данными для следующих моделей ТМ: (а) НФУ, как реализовано в [12, р. 118] (сплошная чёрная кривая); (б) модели РАР для  $mc^2 = 48 \text{ кэВ}$  (сплошная красная кривая) и  $345 \text{ кэВ}/c^2$  (пунктирная зеленая кривая). Далее на том же рисунке построили вклад только для ТМ в соответствующую общую сумму кривой вращения для каждой модели ТМ. В пределах области 1 или несколько кпк вклад барионных

компонентов доминирует по отношению к ТМ, в то время как на расстояниях  $r \gtrsim 10$  кпк наблюдается растущее доминирование компонента ТМ

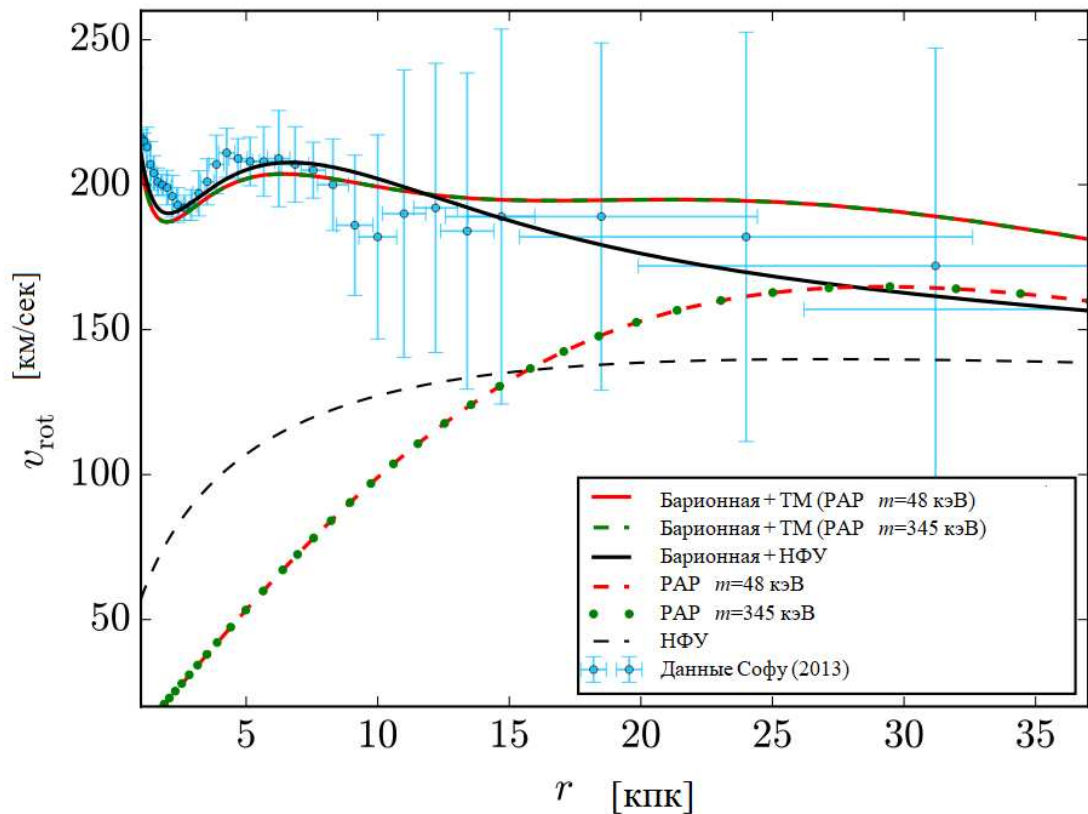


Рисунок 19 – Сравнение (тёмная материя + барионная) кривых вращения, заданных моделью Руффини-Аргельес-Руеда (для масс фермиона  $mc^2 = 48$  кэВ и  $345$  кэВ) и Наварро-Фрэнк-Уайта [12, р. 118], в области  $r = 1 - 35$  кпк.

Как показано на рисунке 18, из-за специфики граничных условия гало Млечного Пути, налагаемые на все решения модели РАР, практический идеально совпадают (в пределах 1%) во всех кривых РАР от внутреннего гало и за его пределами (т.е. в рамках роста  $v_{TM} \propto r$  и до  $r_b$ ). В частности, схожее поведение между ( $mc^2 = 48, 345$  кэВ) различными профилями РАР для ТМ в областях с добавлением неизменяемых барионных вкладов объясняют совпадение общей (барионная + РАР-ТМ) кривой вращения (сплошная красная и пунктирная зеленая).

Вместо этого существует видимая и заметная разница при сравнении различных моделей РАР и НФУ (только для ТМ), в основном в области  $1-10$  кпк. Независимо от этого несоответствия, оба профиля обеспечивают сравнительно хорошее соответствие общей кривой вращения, учитывая, что барионная физика (балдж + диск) является доминирующей в этих масштабах. В то время как тенденция к небольшому превышению общего  $v_{rot}$  [барион + НФУ-ТМ] (чёрная кривая) по отношению к [барион + РАР-ТМ] (например, красная кривая) объясняется крутизной профиля плотности НФУ (внутреннего гало) в отношении к профилю РАР с ядром в этих масштабах. При внешних

радиусах,  $r > 10 \text{ кпк}$ , ТМ доминирует над барионами, и теперь тенденция превышения  $v_{rot}$  [бариона + РАР-ТМ] над [барионом + НФУ-ТМ] напрямую объясняется различием в поведении степенного закона НФУ ( $\rho \propto r^{-3}$ ), относительно РАР ( $\rho \propto r^{-n}$ ), при  $n > 2$ .

Наконец, важно подчеркнуть, что применена простая процедура к наблюдательным данным (т.е. 2 фиксированных граничных условия гало для уравнений профиля ТМ РАР с заданными барионными моделями), и что единственным результатом применения более сложного статистического метода (такой как Монте-Карло цепей Маркова или аналогичный) является дальнейшим усовершенствованием фиттинга.

Ниже суммируем более общие результаты, полученные в этом разделе, включая примеры, показанные на рисунках ниже:

1. Диапазон масс фермиона  $mc^2 \lesssim 10 \text{ кэВ}$  решительно исключается настоящим анализом, поскольку соответствующая кривая вращения начинает превышать общую скорость, наблюдаемую в барионной (балдж) области с преобладанием  $r \approx 2 - 100 \text{ пк}$  (включая верхнюю границу в столбцах погрешностей; например, сильно превышающий случай  $mc^2 \sim 1 \text{ кэВ}$  (пунктирная желтая кривая на рисунке 18)). Для частиц этих масс распределение ТМ приводит к значительному превышению наблюдаемого внутреннего вращения кривых. Это означает, что нижний предел массы фермиона будет сохраняться также для различных и более точных внутренних барионных моделей [98], которые в любом случае изменяют общую кривую внутреннего вращения лишь на небольшой процент по отношению к той, которую мы использовали в этой работе. Кроме того, для этих частиц относительно низких масс ниже  $10 \text{ кэВ}$  и из-за превышения скорости во внутренней области балджа ясно, что эти решения удовлетворяют только выбранным граничным условиям гало и не обеспечивают альтернативы центральной ЧД в Sgr A\*.

2. Все модельные решения РАР для массы фермиона в пределах  $mc^2 \approx 10 - 345 \text{ кэВ}$  дают почти одинаковую общую кривую вращения (как сплошная красная кривая, показанная на рисунке 18 для случая  $mc^2 = 48 \text{ кэВ}$ ) в вышеупомянутой области с преобладанием барионов выше  $\sim 2 \text{ пк}$ , поскольку потенциал ТМ вносит там незначительный вклад по сравнению с барионным (см. пункт ниже 9).

3. В промежуточном диапазоне масс фермиона  $mc^2 = 10 - 48 \text{ кэВ}$  теоретическая кривая вращения не противоречит каким-либо наблюдаемым данным и выводам ТМ в [23], но компактности квантового ядра недостаточно, чтобы быть альтернативой центральному сценарию ЧД в Sgr A\*.

4. Для масс фермионов  $mc^2 = 48 - 345 \text{ кэВ}$  решения РАР с соответствующими начальными параметрами  $(\beta_0, \theta_0, W_0)$  объясняют галактическое гало ТМ и в то же время обеспечивают альтернативу центральному сценарию ЧД. Нижняя граница массы  $m$  определяется динамикой звездного S-скопления. А именно, радиус квантового ядра решений для

$mc^2 \geq 48 \text{ кэВ}$  всегда меньше или равно радиусу звездного перицентра S2, т.е.  $r_c \leq r_{p(S2)} = 6 \times 10^{-4} \text{ пк} \approx 1.5 \times 10^3 r_{Sch}$ .

5. Существует верхняя граница массы  $mc^2 = 345 \text{ кэВ}$ , которая соответствует последней стабильной конфигурации перед достижением критической массы для гравитационного коллапса ( $M_c^{cr} \propto m_{Planck}^3 / m^2$ ), и которая рассчитана в соответствии с критерием поворотной точки для коллапса ядра в [99]. Радиус ядра критической конфигурации составляет  $r_c \approx r_{Sch}$ , при этом  $r_{Sch}$  имеет радиус Шварцшильда  $4,2 \times 10^6 M_\odot$  ЧД [100]. В частности, следующий набор начальных условий

$$\beta_0 = 1,03 \times 10^{-5}, \theta_0 = 37,14, W_0 = 65,252 \quad (3.22)$$

$$\beta_0^{cr} = 5,04 \times 10^{-5}, \theta_0^{cr} = 47,59, W_0^{cr} = 77,706 \quad (3.23)$$

были получены для нижней и верхней границ частиц массы ТМ, соответственно (верхний индекс "cr" обозначает критическую конфигурацию).

6. Для относительно низкого компактного ядра, рассчитанного для  $mc^2 = 10,4 \text{ кэВ}$ , мы имеем  $\lambda_B = 3,1l_c$ ; в то время как в наиболее компактном ядре (чёрная сплошная кривая на рисунке 17 для  $mc^2 = 345 \text{ кэВ}$ )  $\lambda_B = 4,0l_c$ . Это оправдывает использование статистического подхода квантовых фермионов.

7. Вклад ТМ в кривые вращения галактического гало должен быть выше  $\sim 7 \text{ кмк}$  (см. рисунки 17 и 18). Это согласуется с моделью ТМ - независимыми наблюдениями и анализом, проведенными в [101].

8. Интересно, что в диапазоне масс  $mc^2 = 10 - 345 \text{ кэВ}$  распределение РАР ТМ предсказывает кеплеровские кривые вращения при  $r \lesssim 2 \text{ пк}$  (рисунок 18).

9. В указанном выше диапазоне масс кривая полного вращения  $v_{rot} = \sqrt{r(d\Phi/dr)}$  (см. сплошную красную линию на рисунке 18) хорошо согласуется с наблюдениями в пределах погрешностей наблюдений. Кроме того, минимум на кривой вращения ТМ совпадает с абсолютным максимумом  $v_{rot}$  (т.е. пиком балджа) достигнутым при  $r \approx 0,4 \text{ пк}$ . Этот своеобразный факт может быть ключом к более глубокому пониманию сложной истории барионного звездного балджа поверх ранее сформированной структуры ТМ. Этот вывод, как и предыдущий, основан на предположении, что индикаторы в такой области Галактики следуют за гравитационным потенциалом, и поэтому такая связь должна быть принята с осторожностью, учитывая отсутствие осесимметрии потенциала в этих масштабах балджа [12, p. 118].

### 3.3 Профиль тёмной материи для карликовых и спиральных галактик

Распределение в фазовом пространстве включает как классическое, так и квантовые режимы. Соответственно, интегрирование уравнений равновесия приводит к трем резко различающимся режимам (см. рисунки 20-22): а) первый состоит из квантового ядра почти вырожденного фермиона. Эти гало характеризуются тем, что  $\theta(r) > 0$ . Радиус ядра  $r_c$  определяется из первого максимума скорости. Необходимое условие квантовой трактовки для центрального ядра состоит в том, что среднее расстояние между частицами  $l_c$  должно быть меньше или того же порядка тепловой длины волны де Бройля инов,  $\lambda_B = h / \sqrt{2\pi mkT}$ . Как показано (на рисунке 23), это действительно выполняется во всех изученных здесь случаях. (б) Второй режим, когда  $\theta(r)$  переходит от положительных значений к отрицательным для  $r > r_c$ , весь промежуток вплоть до так называемой классической области, где квантовые поправки становятся незначительными. Эта переходная область представляет собой резко уменьшающуюся плотность, за которой следует протяженное плато. (в) Классический режим, описываемый статистикой Больцмана и соответствующий с  $\theta(r) \ll -1$  (для  $r \geq r_h$ ), в котором решение стремится к ньютоновскому изотермическому шару с  $\rho \sim r^{-2}$ , где начинается плоская кривая вращения. Конечно, плоский участок кривой скорости не может продолжаться бесконечно в случае реалистичных ограниченных систем. Это может быть легко достигнуто в контексте модели PАР и без изменения результатов, представленных здесь, путем ограничения импульса пространства с учетом возможных приливных эффектов, как сделано в [6,102].

Таблица 8 – Свойства ядра для различных равновесных конфигураций, удовлетворяющих параметрам гало в уравнении (3.17) для спиральных галактик

$\theta_0$	$m(\text{кэВ}/c^2)$	$r_c(\text{пк})$	$M_c(M_\odot)$	$v_c(\text{км/сек})$	$\theta_c$
11	0,420	$3,3 \times 10^1$	$8,5 \times 10^8$	$3,3 \times 10^2$	2,1
25	4,323	$2,5 \times 10^{-1}$	$1,4 \times 10^7$	$4,9 \times 10^2$	5,5
30	10,540	$4,0 \times 10^{-2}$	$2,7 \times 10^6$	$5,4 \times 10^2$	6,7
40	64,450	$1,0 \times 10^{-3}$	$8,9 \times 10^4$	$6,2 \times 10^2$	8,9
58,4	$2,0 \times 10^3$	$9,3 \times 10^{-7}$	$1,2 \times 10^2$	$7,5 \times 10^2$	14,4
98,5	$3,2 \times 10^6$	$3,2 \times 10^{-13}$	$7,2 \times 10^{-5}$	$9,8 \times 10^2$	21,4



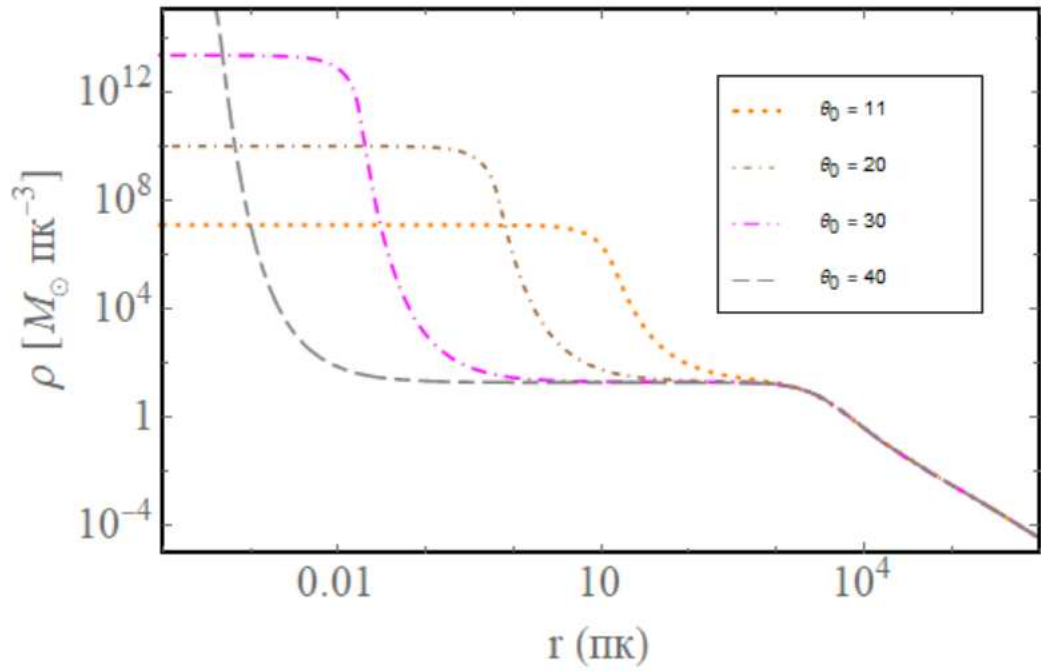


Рисунок 20 – Плотность массы для конкретных масс *ино*  $t$  и центральных вырождений  $\theta_0$ , удовлетворяющих наблюдательным ограничениям в уравнении (3.17)

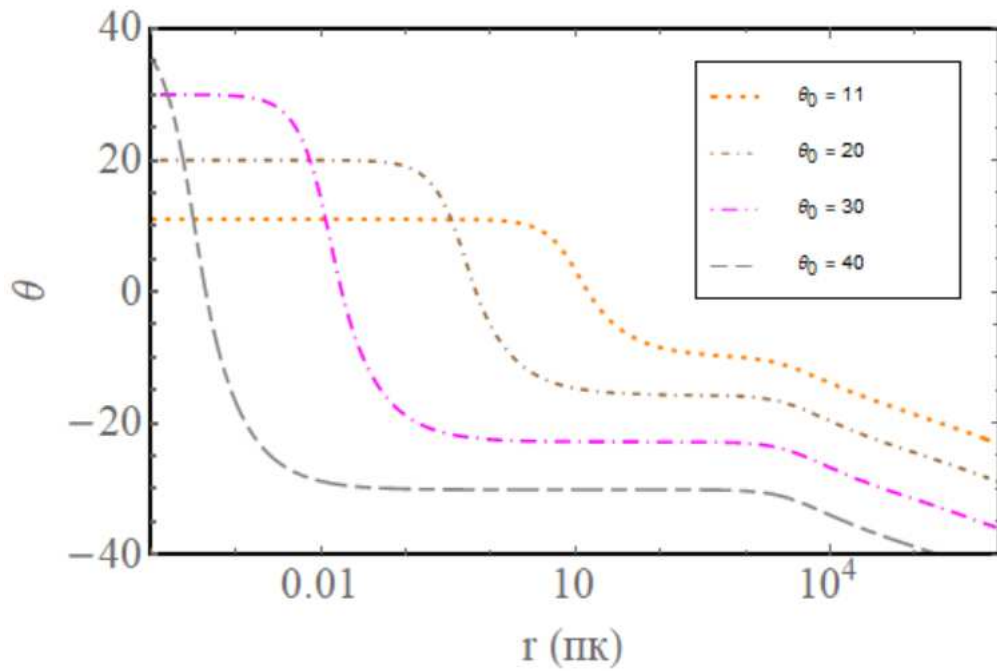


Рисунок 21 – Параметр вырождения для конкретных масс *ино*  $t$  и центральных вырождений  $\theta_0$ , удовлетворяющих наблюдательным ограничениям в уравнении (3.17)

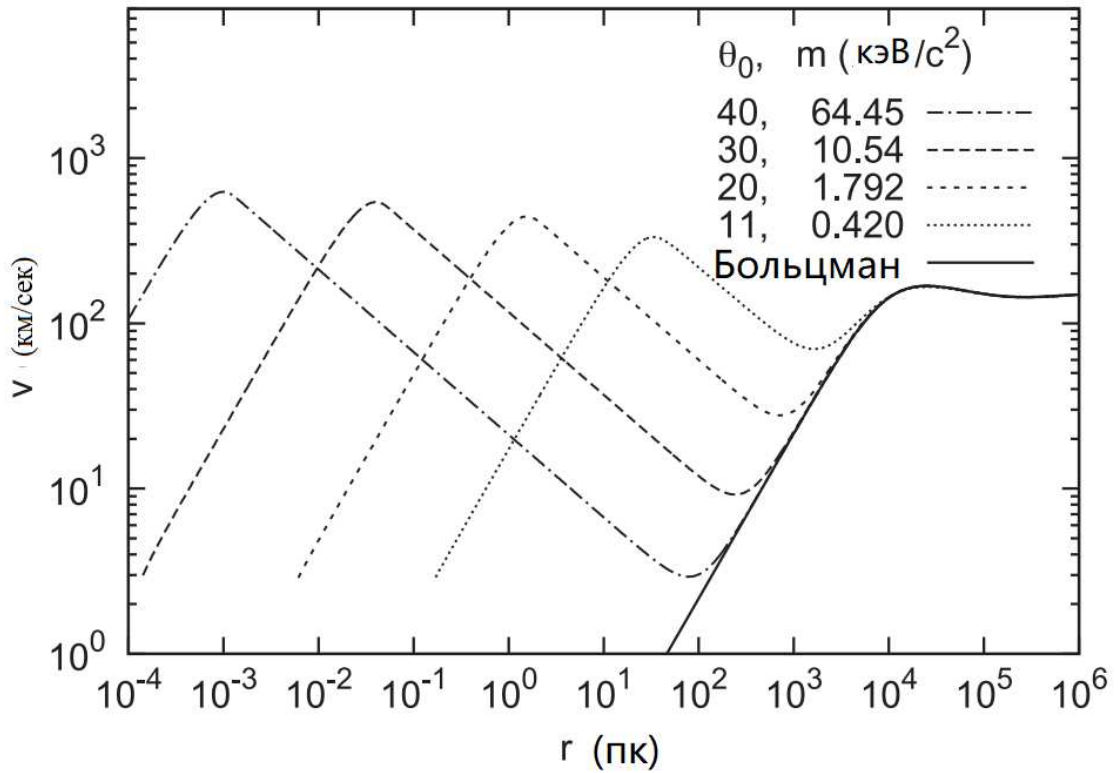


Рисунок 22 –Кривая вращения для конкретных масс *ино*  $m$  и центральных вырождений  $\theta_0$ , удовлетворяющих наблюдательным ограничениям в уравнении (3.17)

Мы определяем массу ядра, круговую скорость при  $r_c$  и ядро вырождения как  $M_c = M(r_c)$ ,  $v_c = v(r_c)$  и  $\theta_c = \theta(r_c)$ , соответственно. В таблице 8 и рисунках 20-22 видно, что масса ядра  $M_c$  сильно зависит от массы ино, и что максимальная пространственная плотность в активной зоне значительно больше, чем максимальное значение рассмотренное в [56, p.408] для максвелловского распределения. Как видно из рисунка 20 менее вырожденные квантовые ядра, согласующиеся с наблюдаемыми гало (3.17), имеют наибольшие размеры порядка масштабов расстояния гало. В этом пределе масса фермиона приобретает минимальное значение суб-кэВ что больше, но сравнимо, чем соответствующая суб-кэВ связанная с [56, p.408], для тех же самых наблюдаемых гало. Действительно, их формула дает нижний предел  $m \approx 0,05 \text{ кэВ}/c^2$ , когда используем верное значение для радиуса  $r_k \cong 8,5 \text{ кпк}$ , как получено из  $\sigma = \sqrt{2/5}v_h$  и  $\rho_0 = 2,5 \times 10^{-2} M_\odot \text{ пк}^{-3}$ , которые являются значениями связанные с больцмановским профилем плотности на рисунках 20-22. Это небольшая разница формально понимается следующим фактом: в то время как их выводы сделаны путем принятия максимальной плотности фазового пространства,  $Q_{\text{max}}^h \sim \rho_0^h m^{-4} \sigma_h^{-3}$  в центре гало, описанного по распределению Максвелла; в модели РАР максимальная плотность фазового пространства достигается в центре плотного квантового ядра, описываемого

статистикой Ферми – Дирака,  $Q_{\max}^c \sim \rho_0^c m^{-4} \sigma_c^{-3}$  (где нижний и верхний индекс соответствуют центральному ядру). Существует целое новое семейство решений для больших значений заполнения числа центрального фазового пространства, которые всегда согласуются с наблюдаемыми гало (см. рисунки 20-22). Теперь, поскольку эти значения фазового пространства, по теореме Лиувилля, не могут превышать максимальную начальную плотность фазового пространства при разъединении,  $Q_{\max}^d$ , мы имеем  $Q_{\max}^{h,c} < Q_{\max}^d$ . Тогда, учитывая, что все квантовые решения удовлетворяют  $Q_{\max}^c > Q_{\max}^h$ , это прямо подразумевает большие значения массы ино по сравнению с пределом Трёмейна и Ганна [103]. Тем не менее, как было показано выше, например, в случае спиральных галактик, два предела становятся сопоставимыми для менее вырожденных ( $\theta_0 \approx 10$ ) квантовых ядер в соответствии с использованными наблюдаемыми гало (3.17).

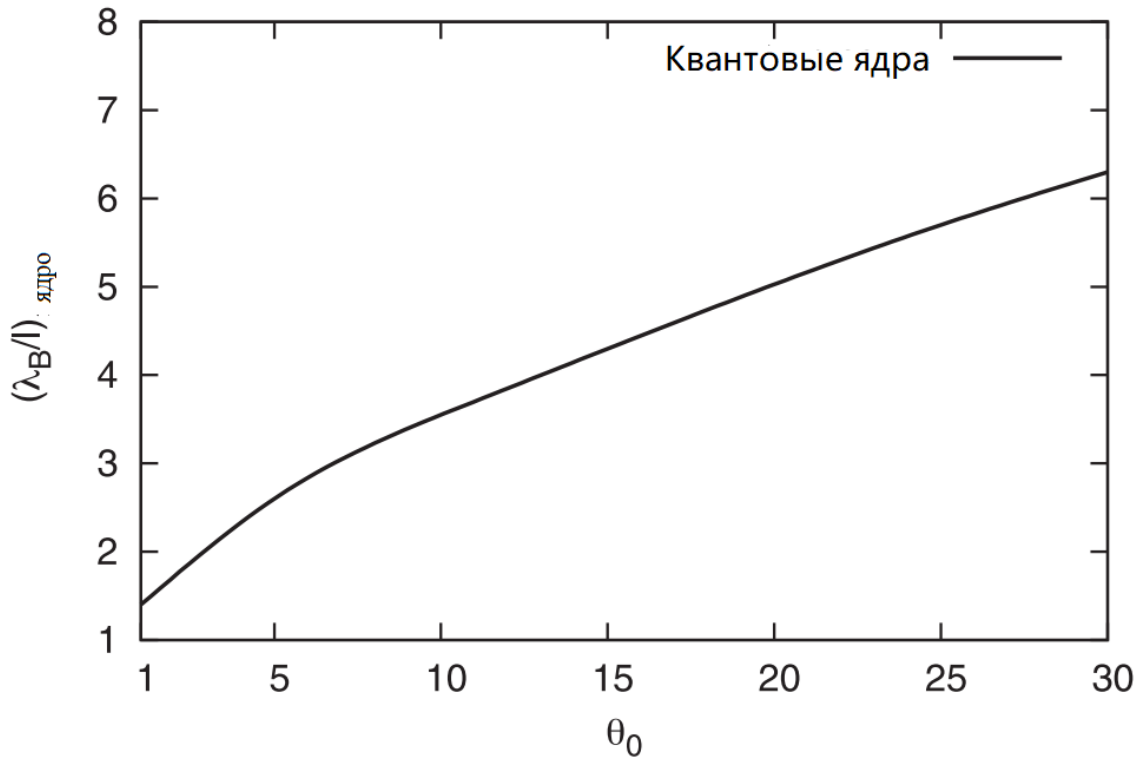


Рисунок 23 – Менее вырожденные квантовые ядра в соответствии с наблюдаемыми гало (3.17) соответствуют  $\theta_0 \approx 10(\lambda_B \sim 3l_c)$

В случае типичной спиральной галактики для ино массы  $m \sim 10kэВ/c^2$  и параметром температуры  $\beta_0 \sim 10^{-7}$ , полученные из наблюдаемой скорости вращения гало  $v_h$ , длина волны де Бройля  $\lambda_B$  больше, чем среднее расстояние между частицами в ядре  $l_c$ , см. Рис. 20-22, что доказывает квантово-статистическое рассмотрение применяемое здесь. Квантовые ядра, указанные

на рисунке 23 достигают наибольших размеров, порядка  $\sim 10^1$  пк, и подразумевают наименьшие массы ино в области ниже кэВ.

Если обратиться к вопросу об альтернативной интерпретации чёрной дыры на Sgr A\*, приходим к выводу, что компактная вырожденная масса ядра  $M_c \sim 4 \times 10^6 M_\odot$  определенно возможна, в соответствии с ино  $m \sim 10 \text{ кэВ}/c^2$  (см. в таблице 8). Однако, радиус ядра конфигурации больше в  $\sim 100$  раз, чем радиус, полученный с помощью ближайшей наблюдаемой звезды к Sgr A\*, то есть звезда S2 [86]. Тем не менее, при незначительной массе  $m \sim 10 \text{ кэВ}/c^2$  ( $\theta_0 = 30$ ) и низкой температуре плотного квантового ядра уже является малой долей энергии Ферми (т.е.  $\lambda_B > l$ ), где должны возникнуть дополнительные взаимодействия между ино, влияющие на массу и радиус нового более плотного ядра. Достигнув теперь более высокой компактности для нового квантового ядра, что полностью согласуется с наблюдательными ограничениями, налагаемыми звездой S2, и всегда для масс ино в диапазоне  $m \sim 10 \text{ кэВ}/c^2$ . Более того, актуальность самовзаимодействий при столкновениях ультрахолодных фермионных частиц уже была продемонстрирована в лабораторных условиях, для ферми-газов,  ${}^6\text{Li}$ , при температурах с долей энергии Ферми [104]. В этой работе было достигнуто хорошее согласие между наблюдениями и теорией для такого холодного ферми-газа. при изучении в терминах канонического многочастичного гамильтониана при вторичном квантовании с учетом фермион-фермионного взаимодействия. Далее сравнили и сопоставили рисунок 24 теоретические кривые и рисунок 22 с результатами наблюдений. Было подробно противопоставлены трехпараметрическая фермионная модель с другими параметрическими моделями тёмной материи, полученным в результате моделирования  $N$  тел, с точки зрения формального статистического анализа Байеса и использование данных с высоким разрешением, в том числе для барионных компонент, в [6, р.1]. Интересно, что квантово-статистическая трактовка, рассматриваемых здесь, характеризуется наличием центральных порошковых структур в отличие от типичных конфигураций касп, полученных из классического нерелятивистского приближения, такого как численное моделирование  $N$  тел в [105]. Это, естественно, приводит к первому шагу с точки зрения физического подхода, основанный на первом принципе, чтобы понять хорошо известное несоответствие ядра и проблемы каспа, как впервые показано в работе [106] и дополнительно подтверждено для типичных спиральных галактик [73, р.15].

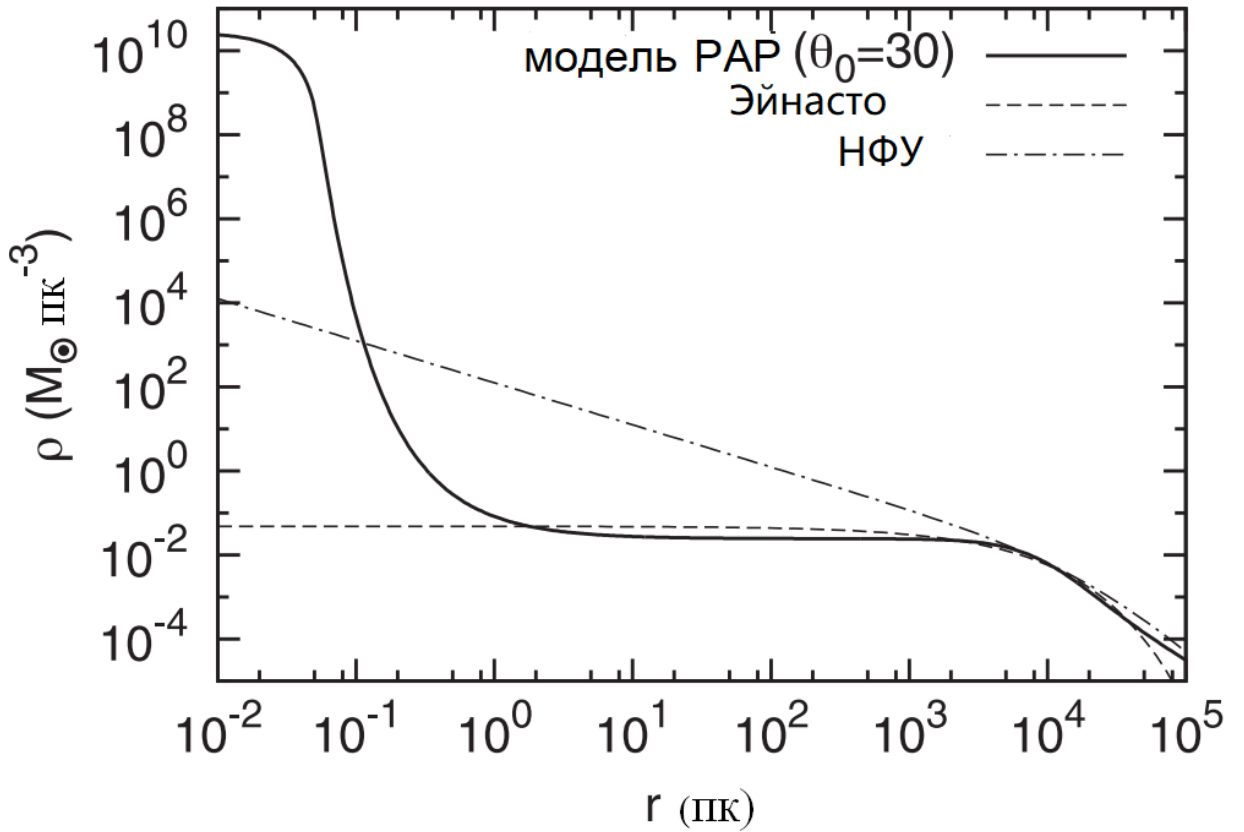


Рисунок 24 – Поведение ядра профиля плотности тёмной материи из модели Руффини-Аргельес-Руеда сопоставляем с профилем плотности гало Наварро-Френк-Уайта и с профилем Эйнасто [107,108]

На рисунке 24 свободные параметры модели РАР фиксируются как  $\beta_0 = 1,251 \times 10^{-7}$ ,  $\theta_0 = 30$  и  $m = 10,54 \text{ кэВ}/c^2$ . Соответствующие свободные параметры в формуле НФУ  $\rho_{\text{НФУ}}(r) = \rho_0 r_0 / [(r(1+r/r_0))^2]$  выбраны следующим образом:  $\rho_0 = 5 \times 10^{-3} M_\odot \text{ пк}^{-3}$  и  $r_0 = 25 \text{ кпк}$ , и для профиля Эйнасто  $\rho_E(r) = \rho_{-2} \exp[-2n(r/r_{-2})^{1/n} - 1]$ ,  $\rho_{-2} = 2,4 \times 10^{-3} M_\odot \text{ пк}^{-3}$ ,  $r_{-2} = 16,8 \text{ кпк}$  и  $n = 1,5$ . В последних двух моделях выбраны свободные параметры типичные для спиральной галактики согласно [73, p.15, 75].

Следуя проведенному здесь анализу для типичной спирали, мы также рассмотрели два новых набора тёмной материи гало:  $r_h = 0,6 \text{ кпк}$ ;  $v_h = 13 \text{ км сек}^{-1}$ ;  $M_h = 2 \times 10^7 M_\odot$  для типичных карликов сферических галактик, как было проанализировано в [109]. Для больших спиралей,  $\lambda_B / l_c = 4,1$ , обосновывает квантовую обработку в обоих случаях.

Примечательным результатом применения модели РАР к такому широкому спектру репрезентативных типов галактик тёмного гало, от карликов до больших спиралей, является то, что для одной и той же массы ино,  $m \sim 10 \text{ кэВ}/c^2$ , получена соответствующая масса ядра  $M_c \sim 10^4 M_\odot$  и радиус

$r_c \sim 10^{-1}$  пк для карликовых галактик и масса ядра  $M_c \sim 10^7 M_\odot$  и радиус  $r_c \sim 10^{-2}$  пк для больших спиралей. Это приводит к возможной альтернативе промежуточных ( $\sim 10^4 M_\odot$ ) и более массивных ( $\sim 10^{6-7} M_\odot$ ) чёрных дыр, которые как считается, находятся в центре галактик.

Более того, из первых принципов была получена возможная универсальная связь между гало тёмной материи и сверхмассивным тёмным центральным объектом. Для фиксированной массы ино  $m = 10 \text{ кэВ}/c^2$  находим корреляцию

$$\frac{M_c}{10^6 M_\odot} = 2,35 \left( \frac{M_h}{10^{11} M_\odot} \right)^{0,52} \quad (3.24)$$

для основных масс  $\sim [10^4, 10^7] M_\odot$  (соответствует массам гало тёмной материи  $\sim [10^7, 10^{12}] M_\odot$ ). Относительно наблюдательной связи между массивными тёмными компактными объектами и дисперсией балджа скорости в галактиках ( $M_c - \sigma$  отношение [110]), его можно комбинировать с двумя соотношениями, выведенными из наблюдений, такими как  $\sigma - V_c$  и  $V_c - M_h$  корреляции, где  $V_c$  - наблюдаемая круговая скорость гало и  $M_h$  типичная масса гало. Это было сделано в [111], чтобы найти с помощью переходности новую корреляцию между центральными массовыми концентрациями и массу гало тёмных ( $M_c - M_h$ ). Появление ядра, окруженного нерелятивистским галом, является ключевой особенностью конфигураций в данной работе. Однако, её нельзя распространить на квантовые ядра с массами  $\sim 10^9 M_\odot$ . Такие массы ядра, наблюдаемые в активных ядрах галактик, превышают значение критической массы для гравитационного коллапса  $M_{cr} \sim M_{pl}^3 / m^2$  кэВ-фермиона, поэтому эти ядра обязательно должны быть чёрными дырами [112].

Здесь уместно обсудить качественную и количественную релевантность общего релятивистского подхода, предложенного здесь, для моделирования распределения тёмной материи в галактиках при сравнении с классическим ньютоновским подходом. Для анализируемого здесь примера, т.е. для  $m \sim 10 \text{ кэВ}/c^2$  и спиральной галактики,  $GM_c / (r_c c^2) \sim 10^{-6}$ , общие релятивистские эффекты не являются доминирующими в этих конфигурациях. Ожидается, что ньютоновский подход удовлетворительно описывает конфигурации. Действительно, интегрируя соответствующие уравнения равновесия в ньютоновском случае, которые получаются в нерелятивистском пределе слабого поля, получены результаты, аналогичные общерелятивистскому решению в пределах 1% (для спиральных галактик и  $m \sim 10 \text{ кэВ}/c^2$ ) сохраняя структуру ядра-гало, содержащую три заметно разных физических режимов из режима квазивыврождения в активной зоне вплоть до Больцмановского гало. Такая смена режимов связана с сочетанием ненулевых температур и изменяющегося химического потенциала фермиона с расстоянием, которые

приводят к изменению параметра вырождения с изменением расстояния. Если бы здесь моделировали галактические гало, предполагая нулевую температуру, получили бы другое поведение профиля плотности, что приводит к неплоским кривым вращения, следовательно, несовместимо с наблюдениями. Общий релятивистский подход становится необходимостью в случае более компактных конфигураций, приближающихся к критической массе для гравитационного коллапса  $M_{cr} \sim M_{pl}^3 / m^2 \sim 10^9 M_{\odot}$ , который как показано в [112, p. 810] может быть достигнут в центральном компактном ядре, наблюдаемые в АЯГ одним и тем же кандидатом в тёмную материю из  $m \sim 10 \text{ кэВ}/c^2$  и соответствующие другим граничным условиям по сравнению с рассмотренным здесь случаем галактик.

Далее, чтобы кратко обсудить астрофизические последствия полной морфологии кривых вращения тёмной материи, а также числовые последствия параметров температуры и вырождения найдены здесь. Действительно, проблема рассматриваемая здесь относится только к составу чистой тёмной материи, в то время как данные наблюдений относятся к сумме тёмного и барионного (газ и звездное население) материи. Ключевой результат, состоит в том, что вклад тёмной материи всегда преобладает во внутреннем ядре (в масштабах меньше парсека) и во внешней области гало в пологой части данной кривой вращения; в то время как между барионное вещество преобладает. Мы можем видеть из рисунка 22, что для галактики, подобной Млечному Пути, модель правильно предсказывает как значение, так и выравнивание круговой скорости при расстояния  $r \geq 10 \text{ кпк}$ . Что касается фактических значений температур тёмной материи и (эффективные) химические потенциалы, полученные из свободных параметров модель  $(\beta_0, \theta_0)$  в соответствии с (квази) релаксированными галактическими структурами, анализируемыми здесь, мы имеем: для инородной массы  $m \sim 10 \text{ кэВ}/c^2$  в типичных карликах  $T_d \sim 10^{-1} \text{ K} (\beta_0 \sim 10^{-9})$ , в то время как в спиральных  $T_s \sim 10^1 \text{ K} (\beta_0 \sim 10^{-7})$ . Эти значения в сочетании с параметрами центрального вырождения дают для типичных карликов  $\mu_d \sim 10^{-7} \text{ кэВ} (\theta_{0,d} = 15)$  и  $\mu_s \sim 10^{-5} \text{ кэВ} (\theta_{0,s} = 30)$  или  $\mu_{bs} \sim 10^{-4} \text{ кэВ} (\theta_{0,bs} = 36)$  для типичной спирали или больших спиралей соответственно. Проблема потенциальных последствий этих температур тёмной материи и химического потенциалов в связи с различными возможными микроскопическими моделями для кандидата тёмной материи в космологии, будет предметом для будущих работ.

### 3.4 Выводы по 3 разделу

Теперь из результатов ясно, что гравитационное ограничение системы, основанное на распределении фермионного фазового пространства, включая энергию обрезки частиц (или эффекты скорости убегания) и центральное

вырождение, могут объяснить содержание ТМ в Галактике, обеспечивая естественную альтернативу сценарию центральной ЧД в Sgr A\*.

В частности, мы показали, что:

– массы фермионов  $mc^2 \lesssim 10$  кэВ исключаются из кривой вращения Млечного Пути, поскольку вклад ТМ в кривую вращения значительно превышает наблюдаемые значения;

– для  $mc^2 = 48 - 345$  кэВ, распределение гало ТМ согласуется со стандартными данными кривой вращения Млечного Пути и содержит плотное квантовое ядро размером  $4 \times 10^6 M_{\odot}$  в перицентре звезды S2.;

– для  $mc^2 = 48 - 345$  кэВ распределение ТМ также согласуется с данными кривой вращения Галактики, но компактность квантового ядра ТМ не соответствует, чтобы объяснить динамику S-кластера и, таким образом, стать альтернативой центральному сценарию ЧД.

Общие результаты о распределении ТМ в галактиках можно рассматривать как дополнение к результатам, основанных на стандартном космологическом моделировании. Однако последнее основано на чисто ньютоновском моделировании  $N$ -тела, в отличие от полуаналитического четырехпараметрического подхода, который имеет возможность включать более физические компоненты, такие как квантовая статистика (возникающая из специфических механизмов релаксации фазового пространства), термодинамика и гравитация.

Важным аспектом диапазона масс частиц, составляющего 10-100 кэВ, полученные из наблюдения галактики, заключаются в том, что они в основном ведут себя в спектре мощности (вплоть до масштабов Мпк) так же, как и стандартные космологии  $\Lambda$ CDM, обеспечивая, таким образом, ожидаемую крупномасштабную структуру [109, p. 6].

Все вышесказанное обеспечивает значительную поддержку фермионам в масштабе кэВ в качестве ТМ, которые вполне могут гармонично сосуществовать с другими видами ТМ во Вселенной. Эти аспекты должны будут взаимодействовать с физикой элементарных частиц в отношении природы этих фермионов: суперсимметричные частицы, стерильные нейтрино и т.д.; а также с возможным обнаружением посредством процессов распада, связанных со слабыми взаимодействиями. Действительно, массы фермионов ТМ в относительно небольших пределах, полученного здесь,  $mc^2 = 48 - 345$  кэВ, также возникли в рамках различных микроскопических моделей, основанных на расширениях стандартной модели, и согласуются со всеми космологическими, крупномасштабными структурными и рентгеновскими ограничениями.



## 4 ЭФФЕКТЫ НЕНУЛЕВОГО ДАВЛЕНИЯ ТЁМНОЙ МАТЕРИИ В ГАЛАКТИКЕ МЛЕЧНЫЙ ПУТЬ

Наблюдаемые КВ галактик, отличные от Млечного Пути моделируются с использованием феноменологических профилей ТМ [113], тогда как для галактики Млечный Путь, имеющиеся данные о КВ звезд на разных расстояниях от центра приводят к более сложной парадигме с различными профилями ТМ в зависимости от расстояния [6,114].

С другой стороны, гипотеза о наличии СМЧД в ядре необходима для объяснения мощного рентгеновского излучения, наблюдаемого от квазаров, и природы активного ядра галактик. Наблюдения СМЧД до расстояний красного смещения  $z = 7,54$  показывают, что они уже сформировались менее чем через миллиард лет после Большого взрыва [114]. К сожалению, в настоящее время неясно, как такие СМЧД могли образоваться так быстро. СМЧД также обнаруживаются на более близких расстояниях. Примечательно, что кандидат в СМЧД был замечен с помощью прямой визуализации в ядре галактики М87 [115] и из наблюдений звездной динамики вблизи центра галактики Млечный Путь предполагают существование массивного компактного объекта Sgr A\*, с массой  $M_{Sgr A^*} \approx 10^6 M_{\odot}$  [116]. Ограничения на его размер, сделанные с помощью Very-Long-Baseline-Interferometry в миллиметровых длинах волн, дают оценку не менее  $0.5 a.e.$  [117], с ближайшей наблюдаемой звездой, называемой S2, вращающейся вокруг Sgr A\* с расстоянием в перигелии примерно  $120 a.e.$

Как нам известно, гравитация сверхмассивных чёрных дыр доминирует из центра галактики на расстоянии нескольких парсеков, а на больших расстояниях преобладают плотности ТМ и звезд [12, р. 118]. Разумно предположить, что распределение ТМ должно распространяться к центру галактики. В настоящее время роль ТМ, окружающей СМЧД, является предметом дискуссий [118]. Кроме того, с космологической точки зрения представляется возможным, что ТМ не могла быть в форме пыли [119,120]. Предположение о ненулевом давлении для ТМ имеет важные следствия, как для космологии, так и для строения галактик [121,122]. Ненулевое давление – это наше допущение. В литературе предполагается, что давление тёмной материи в галактике нулевое, если давление нулевое, то это у нас пылевидная материя. Согласно теории гравитации любой объект с нулевым давлением должен, включая пылевидную материю коллапсировать, за счёт силы притяжения. Но фактически мы не видим, что тёмная материя у нас коллапсирует. Тёмная материя формирует стабильные гало вокруг любой галактики. Следовательно, если гало у нас стабильное.

В этом разделе нами предположена, что ТМ за счет гравитации образует связанные сгустки за довольно короткий промежуток времени, даже если она не имеет форму пыли. Таким образом, исследуется, может ли ТМ с давлением объяснить наблюдения, предполагая различные соотношения по содержанию вещества между ТМ и СМЧД. В частности, внимание акцентируется на ГМП,

для которого имеется большое количество наблюдений. Таким образом, мы характеризуем распределение ТМ в ядре галактики через профиль экспоненциальной сферы, в то время как для гало мы предлагаем использовать профили Эйнасто [9, p.75], Буркерт [11, L25] и изотермический [10, p.247]. Мы показываем, что этот выбор может воспроизвести наблюдаемые КВ для далеких звезд в ГМП.

Наши основные цели состоят в том, чтобы (а) теоретически вычислить свойства, которые будут демонстрировать распределение ТМ в соответствии с гипотезой ненулевого уравнения состояния, и (б) сравнить такие свойства с наблюдениями в ГМП. В частности, мы заинтересованы в понимании роли, которую играет давление в движении звезд в ГМП, и возможности того, что центральный компактный объект имеет небольшую массу, которая окружена массивной оболочкой ТМ. С этой целью мы приступаем к следующим действиям:

1. Мы анализируем КВ ГМП, используя основные требования, указанные выше для моделирования геометрии галактики. Таким образом, мы получаем весь список параметров, входящих в наш сценарий;
2. Нами выводятся уравнения состояния для ТМ, которые воспроизводят наблюдения на различных расстояниях от центра галактики;
3. Из уравнения состояния мы вычисляем скорость звука в ТМ для каждого профиля и обсуждаем его результаты;
4. Рассматривая ядро галактики, мы сравниваем эффект линзирования в двух случаях: ТМ без СМЧД и СМЧД без ТМ.

Цель последнего пункта состоит в том, чтобы предположить, что текущие наблюдения над М87 и Sgr A\* не могут исключить, что наблюдаемые эффекты (т.е. движение звезд) могут быть вызваны сочетанием профиля ТМ, окружающего меньшую СМЧД. Мы ожидаем, что будущие наблюдения за движением звезд вблизи центра галактики и светом, излучаемым газом в атмосфере СМЧД в М87, позволят нам лучше контролировать соотношение масс между СМЧД и ТМ. В частности, применительно к удаленным АЯГ и квазарам эта идея подразумевает, что такие источники на самом деле могут быть менее массивными, заключенными в более плотные оболочки ТМ.

Работа организована следующим образом. В подразделе 4.1 мы описываем нашу модель, обсуждаем кривые вращения, а также приводим модель профиля ТМ вблизи галактического центра. В подразделе 4.2 мы получаем ограничения на профиль ТМ в ГМП, обсуждаем уравнение состояния ТМ, и делаем расчет скорости звука в ТМ ГМП, который приведен в подразделе 4.3. Обоснование использования Ньютонской гравитации для распределения ТМ приведено в подразделе 4.6. Сравнение показателя преломления для гравитационного линзирования за счет гравитационного поля со сверхмассивной чёрной дырой, который связан со сгустком ТМ обсуждаемый в подразделе 4.7. Наконец, подраздел 4.8 посвящен краткому

обсуждению возможных будущих наблюдений, которые могут подтвердить предлагаемую модель.

#### **4.1 Моделирование кривых вращения Галактики Млечный Путь с релятивистскими поправками**

Для моделирования КВ по спиральям мы можем использовать доступные данные о звездных расстояниях. К сожалению, для галактик, отличных от ГМП, доступны только данные о звездах во внешних областях галактики. С другой стороны, для ГМП у нас есть данные о звездах на различных расстояниях от центра галактики, что позволяет воссоздать профиль ТМ для всей галактики.

Поэтому предлагаемая модель достаточно общая, чтобы быть применимой к любой галактике, кроме конкретных профилей плотности ТМ полученных из данных о скоростях звезд в ГМП.

Для содержания вещества в галактике мы рассматриваем профиль ТМ, который распространяется по всей галактике и разделен на несколько компонентов, т.е. ядро, балдж, диск и гало. Затем мы изменяем параметры моделей, чтобы воспроизвести поведение, наблюдаемое в ГМП. На основе наблюдательных данных КВ галактики нами вычислены масса каждой части галактики в нашей модели [123]. В этом отношении это выполняется путем использования феноменологических профилей плотности для ТМ в соответствии с гипотезой о том, что ТМ имеет ненулевое давление, т.е. в предположении, что уравнение состояния, полученное из уравнений гидростатического равновесия исчезает.

Кроме того, мы можем рассмотреть также СМЧД, расположенную в центре галактики. Как и ожидалось, вклад СМЧД является доминирующим только очень близко к галактическому центру и, следовательно, станет актуальным только при работе со звездами в ядре. Таким образом, для ядра, по аналогии с тем, что предложено в [124], мы сосредоточимся на сопоставлении существующих данных наблюдений для ГМП со следующими двумя 'экстремальными' теоретическими случаями:

- 1) в центре галактики находится СМЧД и гало галактики описывается профилем Наварро-Фрэнк-Уайт
- 2) в центре галактики есть скопление или сгусток ТМ, полная масса которой приблизительно равна массе кандидата СМЧД.

Исследуя наблюдательные последствия этих двух возможностей, мы утверждаем, что любая ситуация, находящаяся между ними (т.е. центральное распределение массы, частично обусловленное СМЧД и частично оболочкой ТМ), будет неотличима от текущих доступных наблюдений.

Как уже было сказано, различные профили плотности рассматриваются для моделирования распределения ТМ в разных частях галактики. Рассматривая профили для ядра и гало, можно вычислить их параметры из наблюдений. Также решая уравнения гидростатического равновесия с определенными граничными условиями можно получить уравнение состояния.

Таким образом, зная уравнения состояния ТМ можно косвенно изучить ее свойства.

Большинство профилей плотности ТМ, предложенных в литературе, направлены на описание распределений гало для галактик. В этом контексте были рассмотрены асимметричные профили. Численное моделирование формирования галактик предполагает, что гало ТМ должно быть трехосным и что такая асимметрия может распространяться на внутренние области [125]. Однако для распределения ТМ в галактическом центре имеется мало данных [126]. Модели чёрной дыры увеличиваются вместе с профилями гало ТМ, такими как НФУ и Буркерт, показывают, что плотность ТМ должна представлять собой всплеск в центре  $\rho \approx r^{-\alpha}$  со значением  $\alpha$ , определенным моделью эволюции чёрной дыры [127]. В частности, профиль Буркерта в [128] использовался для моделирования оболочки ТМ, окружающей центральную чёрную дыру галактики М87 [129].

## 4.2 Кривые вращения галактик

Предполагая, что галактика приблизительно находится в термодинамическом равновесии и, пренебрегая вкладом, обусловленным материей, можно исходить из общей теории относительности, чтобы использовать сферически симметричное пространство-время в качестве первого приближения для описания распределения ТМ.

Таким образом, мы можем рассмотреть следующий элемент:

$$ds^2 = e^{\frac{2\Phi(r)}{c^2}} c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}} - r^2 d\Omega^2 \quad (4.1)$$

где  $(t, r, \theta, \varphi)$ - сферические координаты и  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$  линейный элемент двухмерной сферы,  $\Phi(r)$  и  $M(r)$  метрические функции определяются из уравнения Эйнштейна. Конечно, релятивистские эффекты становятся актуальными только при высоких плотностях, поэтому полезно сравнить релятивистскую картину с ньютоновской гравитацией, чтобы увидеть, в каких масштабах появляются заметные различия.

Уравнения Эйнштейна с наличием вещества для уравнения метрики (4.1) сводятся к уравнениям гидростатического равновесия, известным в литературе как уравнения Толмана-Оппенгеймера-Волкова (ТОВ), которые можно записать в виде

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (4.2)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = - \frac{G \left( \rho(r) + \frac{P(r)}{c^2} \right) \left( M(r) + \frac{4\pi r^3 P(r)}{c^2} \right)}{r \left( r - \frac{2GM(r)}{c^2} \right)}, \quad (4.3)$$

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{G \left( M(r) + \frac{4\pi r^3 P(r)}{c^2} \right)}{r \left( r - \frac{2GM(r)}{c^2} \right)}, \quad (4.4)$$

где  $\rho$  и  $P$  являются плотностью и давлением вещества, появляющиеся в тензоре энергии-импульса изотропной идеальной жидкости,  $M$  описывает массу вещества, заключенного в сферу радиуса  $r$ , а  $\Phi$  - гравитационный потенциал. Обратите внимание, что  $P$  не равно нулю и может быть использовано для получения уравнения состояния компонентов ТМ.

Предположение о ненулевом давлении, то есть о ненулевом уравнении состояния, для ТМ является чем-то отличным от стандартной парадигмы ТМ, которая рассматривает ТМ в виде пыли. Ненулевое давление ТМ присутствует в уравнениях ТОВ, но также и для ньютоновской гравитации.

В обоих случаях интерпретация ТМ с давлением проста: в глобальном масштабе давление незначительно, но локально его вклад не может быть точно равен нулю в результате взаимодействия составляющих ТМ. А именно, слабо взаимодействующие частицы могут обеспечивать небольшое, но отличное от нуля давление.

Сразу же становится очевидным, что по умолчанию любой макроскопический объект с нулевым внутренним давлением должен коллапсировать. Но мы наблюдаем сгустки гало тёмной материи, которые не разрушаются. Поэтому можно предположить, что ТМ обладает ненулевым давлением (хотя и слишком малым), чтобы уравновесить собственную гравитацию. После этого можно решить систему уравнений ТОВ, чтобы найти давление ТМ. Другая возможность связана со знаком давления ТМ. Действительно, если уравнение состояния отрицательно, то можно найти отталкивающий эффект, обусловленный ТМ. Даже эволюционирующее уравнение состояния ТМ, которое пересекает положительный знак с отрицательным, может указывать на сигнатуру давления ТМ, в принципе обнаруживаемую с помощью будущих экспериментальных зондов.

Как мы уже говорили выше, наличие давления - это не только прерогатива ОТО. Таким образом, предполагая, что ТМ состоит из нерелятивистских частиц, разумно моделировать её через жидкость с давлением. В то же время, чтобы учесть наблюдательные ограничения, такое давление должно быть достаточно низким, чтобы быть незначительным во всей галактике, за исключением близко к ядру.

В пределе слабых полей и малых скоростей уравнения ТОВ сводятся к уравнениям гидростатического равновесия в НГ, т.е. (2.1)-(2.2).

Следующее соотношение, действительно для круговых орбит,

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{v^2}{r}, \quad (4.5)$$

получается линейная скорость исследуемой частицы в гравитационном поле распределения массы  $M(r)$  в ОТО и НГ как

$$v_{TM} = \begin{cases} \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} & \text{в НГ} \\ \sqrt{\frac{\frac{GM(r)}{r} \left( 1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{c^2 M(r)} \right)}{1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}}} & \text{в ОТО} \end{cases} \quad (4.6)$$

Аналогично можно записать линейную скорость частицы в поле ЧД

$$v_{\text{ЧД}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{GM_{\text{ЧД}}}{r}} & \text{в НГ} \\ \sqrt{\frac{\frac{GM_{\text{ЧД}}}{r}}{1 - \frac{2GM_{\text{ЧД}}}{c^2 r}}} & \text{в ОТО} \end{cases} \quad (4.7)$$

Мы видим, что для больших  $r, c \rightarrow \infty$  и  $P/c^2 \ll \rho$  релятивистские уравнения сводятся к их ньютоновским аналогам.

Другой интересной величиной является гравитационный потенциал, который имеет аналитическую форму для чёрной дыры

$$\Phi_{\text{ЧД}}(r) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{GM_{\text{ЧД}}}{r}} & \text{в НГ} \\ \frac{c^2}{2r} \ln \left( 1 - \frac{2GM_{\text{ЧД}}}{c^2 r} \right) & \text{в ОТО} \end{cases} \quad (4.8)$$

Линейные скорости, полученные из теоретических моделей с заданными распределениями вещества для галактики, после можно сравнить с измерениями скорости звезд, чтобы ограничить параметры профиля плотности

ТМ в данной области галактики. В случае ГМП такие измерения доступны для звезд, расположенных в разных частях, начиная от звезд на внешних краях диска и заканчивая звездами, находящимися на расстоянии около  $120 a.e.$  от центра галактики.

Обратите внимание, что для того, чтобы отличить присутствие СМЧД от сгустка ТМ в центре галактики, нам понадобятся данные о линейных скоростях объектов ближе к центру, которые в настоящее время недоступны.

В дальнейшем, учитывая широкий диапазон рассматриваемых масштабов, радиальная координата  $r$  будет выражена в различных единицах измерения, таких как а.е., пк, кпк по мере необходимости.

### 4.3 Кривые вращения Галактики Млечный Путь

Теперь, имея вышеприведенную информацию, необходимо решить, как соотнести теоретические КВ в ОТО и в НГ с измерениями трехмерных скоростей звезд в нашей галактике. Поэтому мы исходим из учета различных профилей плотности для каждой части ГМП. В частности, для внутреннего балджа, основного балджа, диска и гало мы следуем работе [5, р.14]. Для галактического ядра мы рассматриваем либо наличие СМЧД, либо случай профиля плотности ТМ, который может заменить СМЧД, производящий те же КВ для известной звезды. Этот выбор не является решающим, хотя мы рассматриваем наличие и/или отсутствие СМЧД, мы намерены продемонстрировать, что наличие тёмной материи (ядра) аналогичной массы с ЧД также может объяснить движение S-звезд даже лучше, чем ЧД.

Таблица 9 – Параметры моделей, описывающих распределение тёмной материи в галактике Млечный Путь, воспроизведенные из работы [12, р. 118]

Масса компонента	Полная масса ( $M_{\odot}$ )	Масштабный радиус (пк)	Центральная плотность ( $M_{\odot}/\text{пк}^3$ )	Центральное давление ( $M_{\odot}/\text{пк сек}^2$ )
СМЧД	$4.2 \cdot 10^6$	-	-	-
Ядро с эксп. сферой	$4.2 \cdot 10^6$	$r_{co} = 1.417 \cdot 10^{-5}$	$5.873 \cdot 10^{19}$	4.47
Внутренний балдж	$5 \cdot 10^7$	$r_{ib} = 3.8$	$3.6 \cdot 10^4$	$1.21 \cdot 10^{-19}$
Основной балдж	$8.4 \cdot 10^9$	$r_{mb} = 120$	$1.9 \cdot 10^2$	$3.36 \cdot 10^{-21}$
Диск	$4.4 \cdot 10^{10}$	$r_d = 3 \cdot 10^3$	0.15	$3.35 \cdot 10^{-24}$
Гало с профилем НФУ	$5 \cdot 10^9 (r \leq h)$	$h = 12 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^{-2}$	-

В таблице 10 для профиля Эйнасто введен дополнительный параметр, выводимый из наилучшего фиттинга, задается значением  $\alpha = 0,12$ . Здесь мы применяем простой анализ, выполненный с помощью  $\chi$ -квадрат и нелинейной модели, программного обеспечения Wolfram Mathematica.

Таблица 10 – Параметры профилей плотности, описывающих гало галактики Млечный Путь для модели с распределением тёмной материи в ядре без сверхмассивной чёрной дыры

Профил и гало	Полная масса ( $M_{\odot}$ )	Масштабный радиус (пк)	Центральная плотность ( $10^{-3} M_{\odot}$ пк <sup>3</sup> )	Центральное давление ( $10^{-27} M_{\odot}$ /пк сек <sup>2</sup> )	БИК	АИК	ΔБИ	ΔАИ	$\chi^2$
Изо	1,01 ( $r \leq h$ )	$r_0 = 12$	2,17	9,01	96,38	95,99	1,24	1,25	5,3 9
Буркерт	3,06 ( $r \leq h$ )	$r_0 = 12$	11,1	1,81	81,86	81,46	6,72	6,72	5,0 6
Эйнасто	17,5 ( $r \leq h$ )	$r_0 = 12$	20,1	0,39.	81,65	81,6	6,51	6,32	4,2 6
Эксп. сфера	2,63 ( $r \leq h$ )	$r_0 = 12$	7,56	53,11	75,14	74,74	-	-	2,4

Логарифмический график измеренной кривой вращения показан на рисунке 25, вместе с наблюдательными данными с линиями погрешностей, охватывающие области от внутреннего балджа до гало тёмной материи [48,130]. Различные кривые представляют собой наилучший фит с центральной чёрной дырой, два экспоненциально-сферических балджа, экспоненциальная сфера для тонкого диска и профиль НФУ для гало. Параметры модели были воспроизведены с использованием той же процедуры фиттинга, описанной в работах [5,121]. Различные профили плотности, используемые для гало, сравниваются на рисунке 26.

Сначала рассмотрим модель, включающую СМЧД в центре галактики, и, следуя работам [92,96], воспроизведем известные результаты. Логарифмический график измеренных кривых вращения показан на рисунке 25 вместе с наблюдательными данными с линиями погрешностей, охватывающими области от внутреннего балджа до гало. Различные кривые наилучшим образом соответствуют центральной чёрной дыре с массой  $M_{\text{чд}} = 4,2 \times 10^6 M_{\odot}$  [132], профилям экспоненциальной сферы для балджа и диска и профилю НФУ для гало. Как упоминалось ранее, профиль НФУ имеет проблему каспа в центре, поэтому его нельзя использовать в моделях без СМЧД, поэтому позже мы рассмотрим другие профили для гало. Параметры



модели были воспроизведены с использованием той же процедуры фиттинга, описанной в работе [12, р. 118].

На рисунке 25 центральная сверхмассивная чёрная дыра с массой  $M_{\text{чд}} = 4,2 \times 10^6 M_{\odot}$  показана сплошной красной кривой, внутренний балдж с профилем плотности экспоненциальной сферы показан пунктирной и двойной фиолетовой пунктирной кривой, основной балдж с профилем плотности экспоненциальной сферы показан двойной пунктирной и точечной кривой, диск показан пунктирной зеленой кривой, а гало, описанная профилем НФУ [131], показана пунктирной синей линией кривой.

На рисунке 26 показаны различные кривые с наилучшим фиттингом для гало тёмной материи с использованием четырех различных профилей, а именно Буркерт [11, L25], Эйнасто [108, р. 90], экспоненциальной сферы [12, р. 118], изотермический [10, р.247] и НФУ [105, р. 493]. Обратите внимание, что изотермический профиль значительно отличается от других, и поведение функции массы на больших расстояниях говорит о том, что он менее подходит для моделирования гало галактики Млечный Путь.

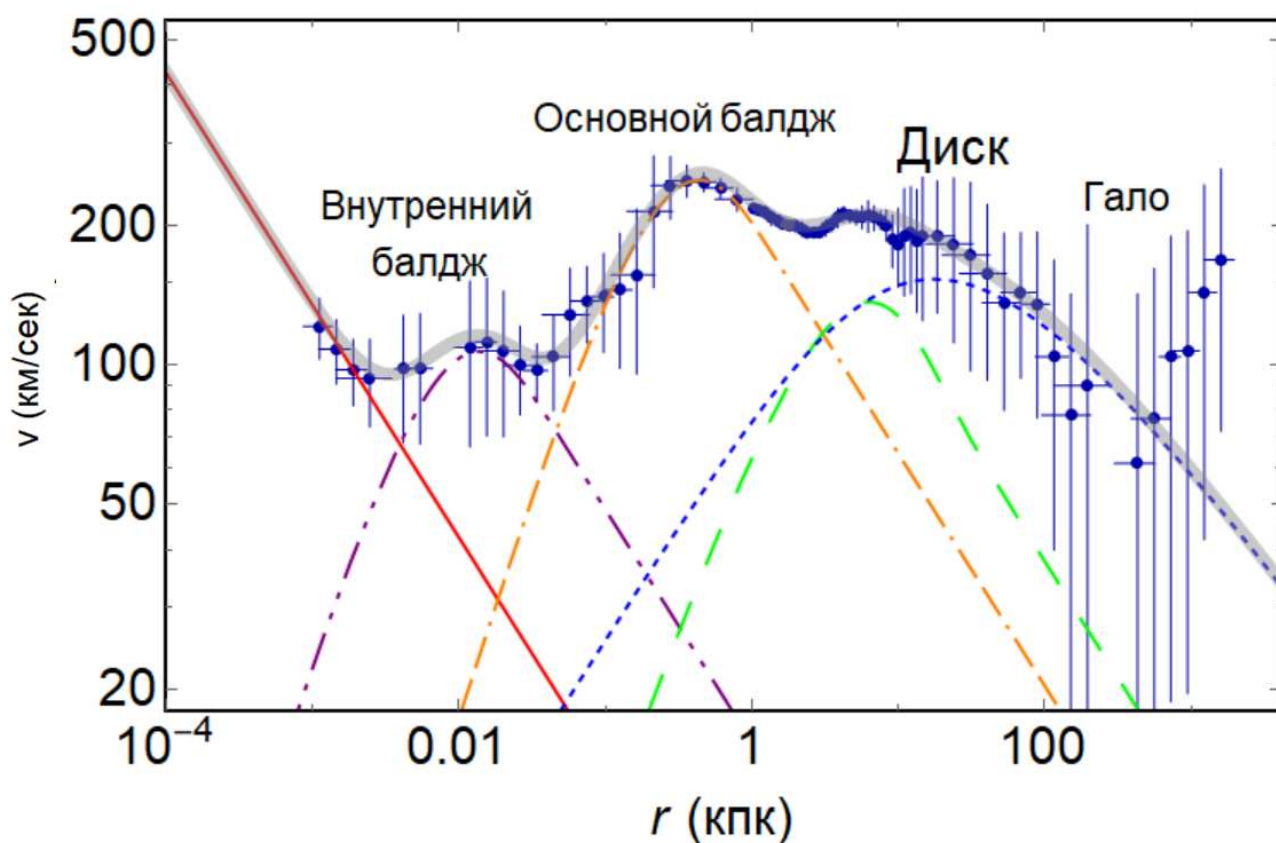


Рисунок 25 – Кривые вращения Галактики, воспроизведённые из работы [12, р. 118] для всей галактики

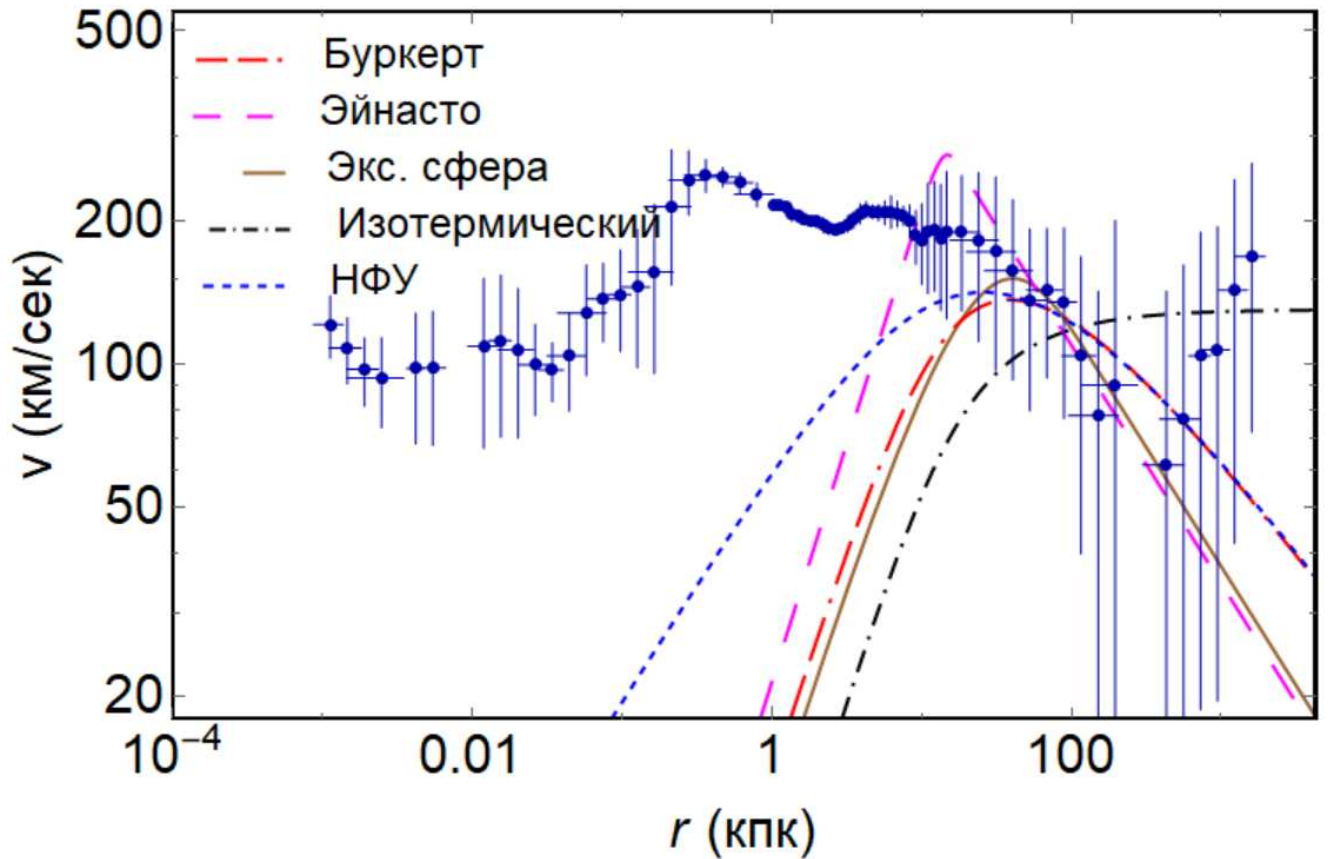


Рисунок 26 – Кривые вращения гало галактики Млечный Путь с различными профилями плотности

Исходя из вышеизложенного, КВ для звезд на расстоянии  $r$  от центра задается суммой индивидуальных вкладов каждого компонента в виде

$$v(r)^2 = v_{\text{ЧД}}(r)^2 + v_{\text{бб}}(r)^2 + v_{\text{обб}}(r)^2 + v_{\text{д}}(r)^2 + v_{\text{г}}(r)^2 \quad (4.9)$$

где  $v_{\text{ВН}}(r)^2$ ,  $v_{\text{бб}}(r)^2$ ,  $v_{\text{обб}}(r)^2$ ,  $v_{\text{д}}(r)^2$ ,  $v_{\text{г}}(r)^2$  линейные скорости пробной частицы (звезды) в гравитационном поле ЧД, внутреннего и основной балджа, плоский диск и гало, соответственно. Используя метод наименьших квадратов, были получены и подтверждены результаты [12, р. 118], включая погрешности. Теоретическая кривая вращения показана на рисунке 25 сплошной толстой серой кривой. Масса ЧД определяется путем фиттинга данных в пределах диапазона  $(10^{-3} \leq r \leq 2) \text{ кпк}$ . На больших расстояниях модель экспоненциальной сферы использовалась для фиттинга наблюдаемого КВ в области балджа ГМП

$$\rho_i(r) = \rho_0^i e^{-\xi_i(r)} \quad (4.10)$$

где  $\rho_i(r)$  - объемная массовая плотность,  $\rho_0^i$  - центральная плотность,  $\xi_i(r) = r/r_0^i$  - безразмерная радиальная координата и  $r_0^i$  - масштабный радиус.

В общем случае  $\rho_0$  и  $r_0$  являются свободными параметрами от модели, которые должны быть получены из анализа наблюдательных данных на интервалах  $(1 \leq r \leq 10^3)$  кпк и индексы  $i = (\text{я, вб, об})$  указывают на соответствующие параметры для галактического ядра, внутреннего и основного балджа. Параметры диска были рассчитаны путем фиттинга наблюдательных данных КВ в диапазоне  $(1 \leq r \leq 10)$  кпк.

#### 4.4 Байесовский анализ профиля плотности гало

Какой профиль лучше всего подходит для гало? Как уже было сказано, нами не рассматривается профиль НФУ, из-за проблемы каспа при  $r = 0$  несовместимо со сценарием, в котором профиль ядра ТМ присутствует без СМЧД. Помимо НФУ и экспоненциальной сферы, другими часто используемыми профилями являются профили Буркерта, Эйнасто и изотермический [3,133]:

Следует подчеркнуть, что из-за больших погрешностей наблюдательных данных (связанных с техническими трудностями измерений), особенно в области гало, на рисунке 25 расхождения появляются при больших  $r$ . По этой причине мы рассматриваем различные профили плотности гало при моделировании галактики без СМЧД.

В таблице 9 нами воспроизведены основные результаты фиттинга для всей ГМП из работы [12, р. 118]. В частности, как и в работе [12, р. 118], при отсутствии СМЧД для моделирования используется экспоненциальный профиль сферы ТМ в центральных частях галактики, в то время как для описания ТМ в гало рассматриваются различные профили, такие как изотермический, Эйнасто и Буркерт (см. таблица 10). Следует отметить, что нами также рассмотрен экспоненциальный профиль сферы [12, р. 118] для описания гало ТМ. Экспоненциальная сфера обычно используется для внутренних частей галактики, но здесь мы применяем ее также и к гало, поскольку, в отличие от других профилей, она дает конечную массу для ТМ при  $r \rightarrow \infty$ , что является большим преимуществом по сравнению с другими профилями, для которых масса расходится при  $r \rightarrow \infty$ .

В таблице 10 нами приведены основные результаты фиттинга ядра и гало ГМП. На протяжении всей работы нами использованы одни и те же результаты для внутреннего балджа, основного балджа и диска, показанных в таблице 10. Рисунок 26 построен с использованием результатов для гало, приведенных в таблице 10.

В таблице 10 мы принимаем статистические характеристики различных разработанных здесь подходов. Для этого мы использовали байесовские критерии отбора для измерения оптимальности данной модели относительно

эталонного сценария. Здесь эталонный сценарий, тот, который минимизирует  $\chi^2$  и является ядром экспоненциальной сферы массовой составляющей. Следовательно, вовлечение информационного критерия Акаике [43] и байесовского информационного критерия [19, p.462], определяемые следующим образом:

$$AIC = -2 \ln L_{\max} + 2p \quad (4.11)$$

$$BIC = -2 \ln L_{\max} + p \ln N \quad (4.12)$$

показывают численные значения, где важно рассматривать  $L_{\max}$  как максимум оценки правдоподобия,  $p$  - число свободных параметров и, наконец,  $N$  точки наблюдательных данных, включенные в наши вычисления.

Поскольку АИК и БИК имеют минимальные значения для гало с профилем массы экспоненциальной сферы, мы выбрали этот профиль в качестве эталонной модели. Все другие подходы предполагают большие значения для АИК и БИК, и поэтому нами вычислены соответствующие числовые значения в таблице 10. Кроме того, нами оценены различия между этими значениями и минимальными.

Различия  $\Delta AIC$  и  $\Delta BIC$  по отношению к эталонной модели вычисляются и свидетельствуют о хорошей эффективности каждого подхода. В частности,

1.  $\Delta AIC(\Delta BIC) \in [0, 2]$ : слабые доказательства в поддержку эталонной модели.
2.  $\Delta AIC(\Delta BIC) \in (2, 6]$ : слабые доказательства в пользу эталонной модели.
3.  $\Delta AIC(\Delta BIC) > 6$ : убедительные доказательства в пользу эталонной модели.

Приведенные в таблице 10 значения указывают на огромную дискретность среди возможных моделей. Ядро с экспоненциальной сферой оказывается статистически наиболее подходящим подходом для моделирования распределения ТМ.

Другие компоненты массы, а именно гало с профилями Буркерта и Эйнасто показали не самые лучшие значения, но лучше, чем изотермический профиль. Поэтому их можно было бы использовать для моделирования массовых компонент, хотя они, очевидно, менее статистически благоприятны, чем гало с экспоненциальной сферой.

#### 4.5 Уравнение состояния тёмной материи

Различные уравнения состояния были получены путем решения системы уравнений гидростатического равновесия с учетом каждого профиля плотности

для ТМ. Свободные параметры каждой модели фиксируются фиттингом наблюдаемых точек данных галактической КВ. При описании компонентов ГМП были использованы следующие профили плотности

- Для ядра, внутреннего и основного балджа нами рассмотрен профиль экспоненциальной сферы.

- Для диска рассмотрели экспоненциальную сферу [12, р. 118] со следующим уравнением [133]:

$$\rho_{\delta}(r) = \rho_0^{\delta} e^{\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{r_{\delta}}\right)r} \quad (4.13)$$

где  $r_{\delta}$  - масштабный радиус диска, а  $R_0 = 8 \text{ кпк}$  - это расстояние Солнечной системы от центра галактики. Переопределив новый масштабный радиус как  $r_{0d} = R_0 r_{\delta} / (R_0 - r_{\delta})$  приведенное выше уравнение можно записать в виде

$$\rho_{\delta}(r) = \rho_0^{\delta} e^{-\xi_{\delta}(r)} \quad (4.14)$$

с безразмерной координатой  $\xi$ .

Для получения профилей давления необходимо интегрировать уравнения (2.1)-(2.3) с заданными профилями плотности с граничным условием, чтобы давление исчезло на границе распределения тёмной материи (которая может находиться на пространственной бесконечности). Для ядра, диска, внутреннего и основного балджа получаем:

$$P_i(\xi) = 8\pi G (r_0^i)^2 (\rho_0^i)^2 \left[ \frac{1}{\xi_i} (e^{-\xi_i} - e^{-2\xi_i}) - \frac{1}{4} e^{-2\xi_i} - \Gamma(0, \xi_i) + \Gamma(0, 2\xi_i) \right] \quad (4.15)$$

где гамма функция  $\Gamma$  определена как  $\Gamma(0, z) = \int_z^{\infty} e^{-t} t^{-1} dt$  и  $i = \{\text{я, вб, об, д, г}\}$ ,

обозначает ядро, внутренний и основной балдж, диск и гало. Заметим, что уравнения ТОВ решаются только численно и на больших расстояниях от центра, обе теории НГ и ОТО дают одинаковые результаты.

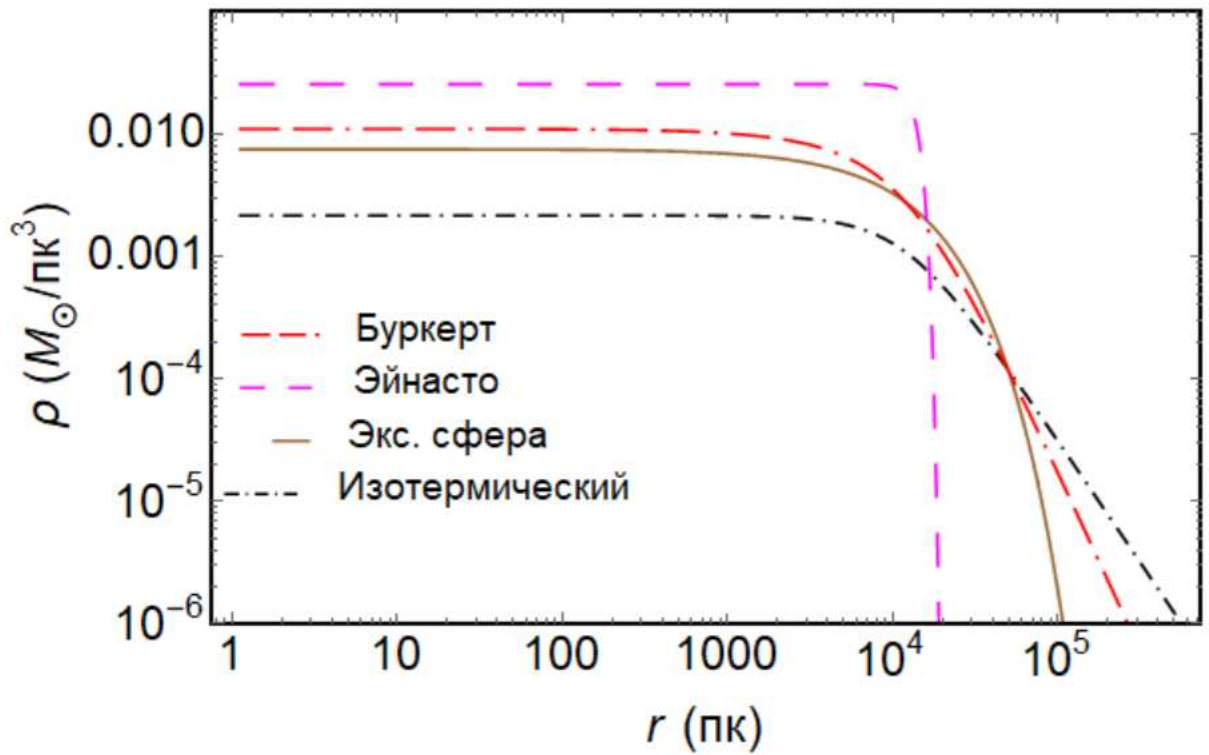


Рисунок 27 – Сравнение логарифмических профилей плотности тёмной материи в гало

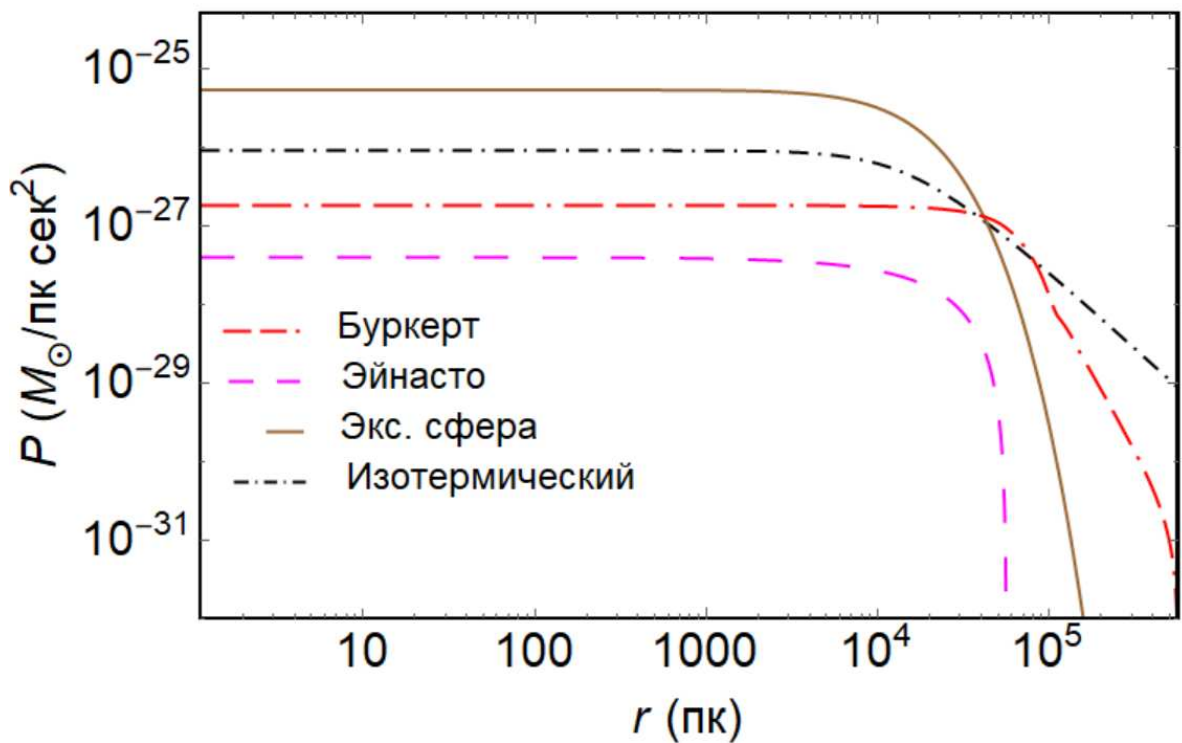


Рисунок 28 – Сравнение логарифмических профилей давления тёмной материи в гало. Дополнительные сведения см. в таблице 10

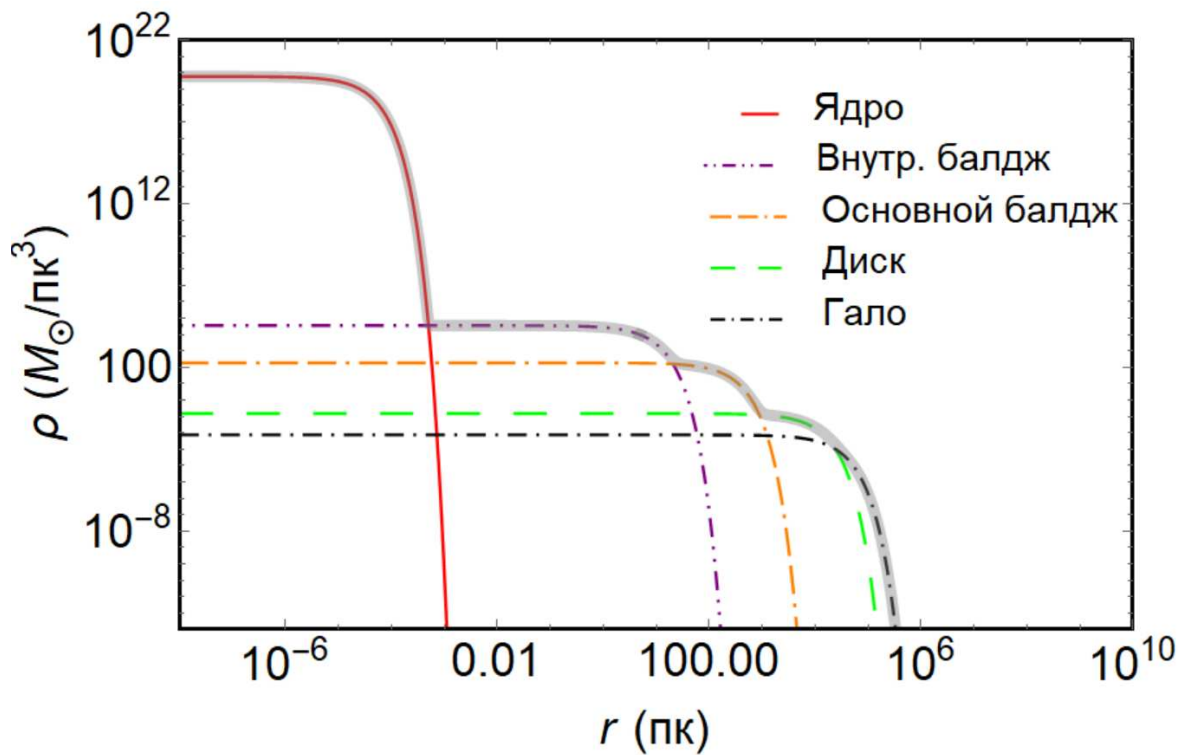


Рисунок 29 – Логарифмические профили плотности тёмной материи в галактике Млечный Путь. Распределение тёмной материи разделено на ядро, внутренний и основной балдж, диск и гало, все они смоделированы с помощью профиля экспоненциальной сферы

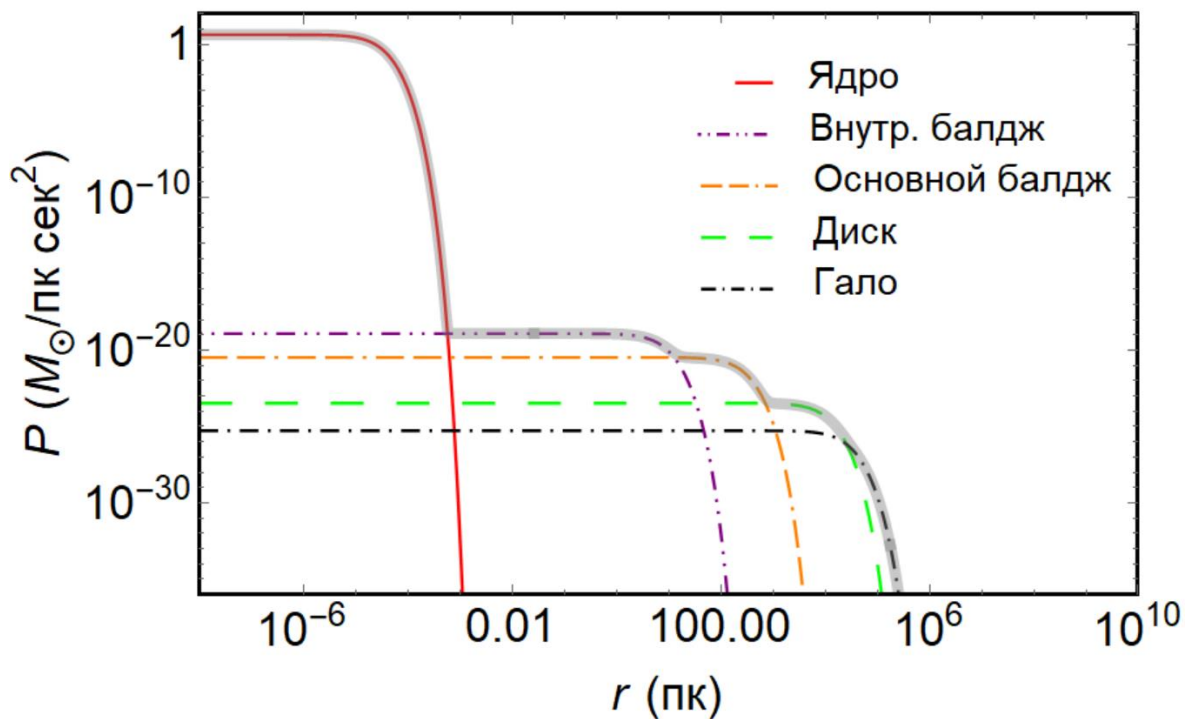


Рисунок 30 – Логарифмические профили давления тёмной материи в галактике Млечный Путь, полученные из профилей плотности

Зависимость плотности  $\rho(r)$  от радиального расстояния  $r$  для различных профилей гало показана на рисунке 27, а поведение соответствующего давления  $P(r)$  отображается на рисунке 28. Обратите внимание, что профиль Эйнасто демонстрирует поведение, значительно отличающееся от остальных на расстояниях, превышающих  $10^4$  пк. Также обратите внимание, что различия между профилями не являются существенными, особенно когда они связаны с линиями погрешностей доступных данных. Поэтому, принимая во внимание байесовский анализ различных профилей, в дальнейшем мы использовали экспоненциальную сферу (1.6) также для описания профиля плотности ТМ в гало.

На рисунках 29-30 графики плотности  $\rho(r)$  и давления  $P(r)$  ТМ для всей ГМП показаны с использованием экспоненциальных сфер (4.14) с давлением, заданным в (4.15). Можно видеть, что профиль давления ТМ совпадает с его профилем плотности.

Скорость звука играет ключевую роль в теории возмущений для объяснения образования структур Вселенной [134]. Также скорость звука определяет длину, выше которой гравитационная неустойчивость преодолевает радиационное давление и возмущения растут. Для адиабатической жидкости скорость звука определяется как  $c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}$ . Скорость звука для ядра, внутреннего балджа, основного балджа, диска и гало задается профилем экспоненциальной сферы следующим образом [32, p.75]:

$$(c_s^i)^2 = 8\pi G (r_0^i)^2 \rho_0^i \frac{(x_i - 1)}{x_i \ln^2(x_i)} \left\{ 1 - \frac{(2 + \ln(x_i)) \ln(x_i)}{2(x_i - 1)} \right\} \quad (4.16)$$

где  $x_i = \rho_{0i} / \rho_i$  и соответственно для гало получен изотермический профиль,

$$(c_s^{Iso})^2 = 2\pi G (r_0^{Iso})^2 \rho_0^{Iso} \frac{x_{Iso}}{x_{Iso} - 1} \left\{ 1 - \frac{\arctan(\sqrt{x_{Iso} - 1})}{\sqrt{x_{Iso} - 1}} \right\} \quad (4.17)$$

Профили давления для распределения плотности в моделях Буркерта и Эйнасто были получены численно, что связано со сложностью их вычисления в аналитической форме.



Таблица 11 – Плотность  $\rho$ , давление  $P$  и скорость звука в облаке тёмной материи для галактики Млечный Путь на различных расстояниях  $r$  от центра галактики

Компоненты	$r(\text{пк})$	$\rho (M_{\odot}/\text{пк}^3)$	$P (M_{\odot}/\text{пк} \cdot \text{сек}^2)$	$c_s(\text{км}/\text{сек})$
Ядро	$10^{-6}$	$5,5 \cdot 10^{19}$	4,4	3771,7
Внутренний балдж	0,1	35065,0	$1,2 \cdot 10^{-19}$	15,5
Основной балдж	150	4,4	$1,3 \cdot 10^{-21}$	157,8
Диск	$6 \cdot 10^3$	$4,3 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-27}$	177,4
Гало	$3 \cdot 10^4$	$6,2 \cdot 10^{-4}$	$4,4 \cdot 10^{-27}$	92,7

На рисунке 31 мы показываем скорость звука для распределения ТМ в ГМП как функцию радиальной координаты от центра. Интересно отметить, что поведение скорости звука аналогично поведению кривой вращения. Действительно, это видно из (4.2),(4.3),(4.5) и соотношение между  $v(r)$  и  $c_s(r)$  задается:

$$c_s(r) = \sqrt{-\frac{d \ln r}{d \ln \rho(r)} \left( 1 + \frac{P(r)}{\rho(r)c^2} \right)} v(r) \quad (4.18)$$

Некоторые выборочные значения плотности, давления и скорости звука распределения ТМ галактики на разных расстояниях от центра приведены в таблице 11. Как и ожидалось, скорость звука больше по направлению к центру галактики, где давление выше. Поэтому, если нам нужно найти некоторые наблюдаемые эффекты УС ТМ в галактике, необходимо смотреть ближе к центру галактики. Обратите внимание, что скорость звука непосредственно не измеряется. В принципе, можно представить, что можно разработать процедуру обратного рассеяния, измерив  $v(r)$ , а затем, если знать плотность либо из наблюдений, либо из теоретических соображений, то можно получить скорость звука. Это соответствовало бы скорости возмущений системы ТМ, т.е. количественной оценке скорости распространения ТМ в галактиках как следствие исчезающего давления. С другой стороны, также возможно постулировать некоторые классы различных УС ТМ, а затем вывести некоторые границы скоростей и / или скорости звука на разных радиусах. Это повлияло бы на весь анализ в галактиках и может быть прямым признаком давления ТМ, подтверждая гипотезу о том, что ТМ может находиться не в форме пыли.

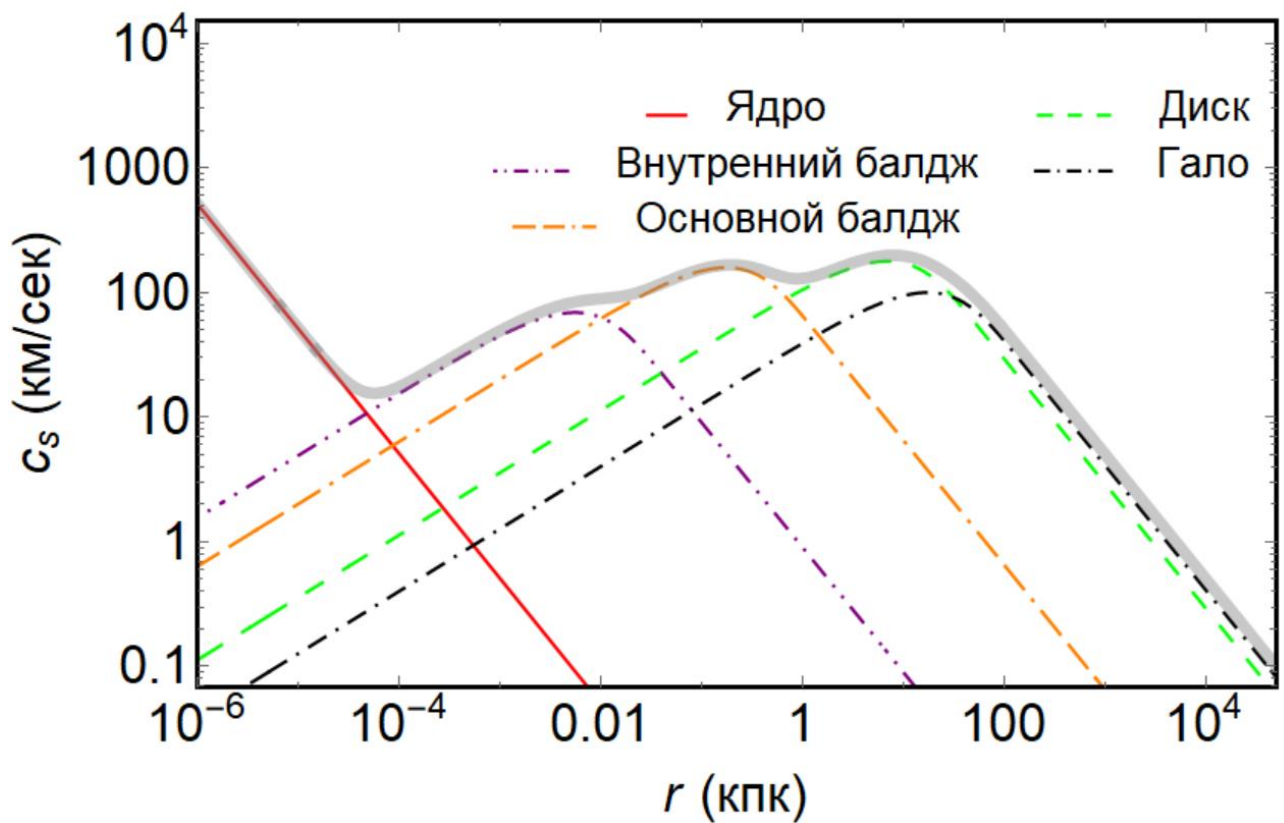


Рисунок 31 – Скорость звука  $c_s$  как функция расстояния от галактического центра для распределения тёмной материи в галактике Млечный Путь

Кроме того, исчезающее давление ТМ явно вызывает эффект торможения пробных частиц, которые движутся внутри жидкости ТМ. Это справедливое следствие для ТМ с исчезающим давлением, поскольку этот эффект наблюдается для невязких жидкостей [135–138]. Используя это предписание, средняя скорость пробной частицы на фоне ТМ пропорциональна градиенту давления, который возникает при наличии исчезающего давления. Это справедливо в нашем сценарии, поскольку нами не учитываются эффекты сдвига и/или теплообмена с окружающей средой. Таким образом, в отличие от космологических масштабов, где любой возможный градиент давления не обеспечивает значительных отклонений в общем потенциале и в соответствующем потоке Хаббла, в таком случае, лежащем на галактических масштабах, ожидаем значительные отклонения, особенно близко к центру галактики, в то время как увеличение эффектов в дальних регионах. Поскольку рассмотренные здесь эффекты профилей ТМ наиболее актуальны для центра ГМП, теперь сосредоточимся на ядре и сравним два экстремальных сценария: один со СМЧД в вакууме, а другой с профилем экспоненциальной сферы для ТМ без СМЧД.

Мы сосредоточим наше внимание на ядре галактики и исследуем различия между наличием чёрной дыры в вакууме и сгустком тёмной материи без чёрной дыры. Для этого мы рассмотрим гравитационное линзирование, обусловленное двумя гравитационными полями. Мы видим, что заметные

различия между этими двумя случаями проявляются только на очень малых расстояниях (менее 100 *a.e.*).

Аналогичным образом, текущие измерения света от аккреционных дисков в центре далеких галактик могут быть обусловлены наличием как сверхмассивных чёрных дыр, так и оболочки из тёмной материи, и мы не можем накладывать ограничения на их соотношение масс. Одним из преимуществ этого сценария является то, что общая масса центральной области галактики может быть задана суммой массы СМЧД и массы ТМ, что позволяет СМЧД в ранней Вселенной быть менее массивной, чем в настоящее время оценивается, при этом создавая те же спектры аккреционного диска.

#### 4.6 Ньютонская гравитация и общая теория относительности

Для большей части анализа мы рассматривали ньютоновскую гравитацию, поскольку, как и ожидалось, вклады ОТО пренебрежимо малы на больших расстояниях. Однако чтобы лучше обосновать использование ОТО и дать некоторое количественное представление о границах ньютоновского анализа, нами будет рассмотрено здесь движение пробных частиц в обоих случаях.

А именно, рассмотрим движение пробных частиц в центральной части ГМП (в диапазоне от 0.25 до 50 *a.e.*) в гравитационном поле СМЧД без ТМ, а в области ТМ без СМЧД используем релятивистские и классические формулы для линейной скорости (см. (4.6) и (4.7) и таблицу 10). Мы можем использовать определение гравитационного радиуса для СМЧД, чтобы формально определить тот же радиус для распределения ТМ. Имеем:

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (4.19)$$

где

$$M = \begin{cases} M_{\text{ЧД}}, & \text{для ЧД,} \\ M(r), & \text{для ТМ,} \end{cases} \quad (4.20)$$

а  $M(r)$  - функция распределения массы ТМ, полученная из уравнения (2.1) с использованием профиля плотности для ядра ГМП (см. уравнение (4.14) и таблицу 10).

Масса  $M(r)$ , заключенная в сферу радиуса  $r$ , после задается интегрированием уравнения (1.10) для различных профилей уравнения (4.13) получаем:

$$M_i(r) = M_0^i F(\xi_i(r)) \quad (4.21)$$

где  $M_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = 8\pi(r_{0я})^3 \rho_{0я}$  полная масса распределения ТМ в рассматриваемой области и

$$F(\xi_i) = 1 - e^{-\xi_i} \left( 1 + \xi_i + \frac{\xi_i^2}{2} \right) \quad (4.22)$$

с  $\xi_r = \xi_r(r) = r / r_{0r}$ .

Простой численный расчет показывает, что при той же общей массе  $M_0 = M_{\text{ЧД}}$ , определяемое расчетной массой Sgr A\*, разница между функцией массы ТМ  $M(r)$  и массой СМЧД становится менее 1% на расстояниях, превышающих 11,65 а.е. Следовательно, 99 % массы профиля ядра ТМ сосредоточено внутри сферы радиусом 11,65 а.е. в центре ГМП.

На рисунке 32 мы сравнили радиальную зависимость  $r_g/r$  из уравнения (4.19) в случае ТМ со случаем ЧД. Очевидно, что различия между двумя сценариями становятся важными в масштабах 20 лет, в режиме, когда НГ все еще является допустимым приближением.

В таблице 12 мы сравнили числовые значения величины  $r_g/r$  в зависимости от радиальной координаты для СМЧД и ТМ.

На рисунке 33 мы сравнили скорость пробной частицы в гравитационном поле профиля ТМ без СМЧД в ОТО и НГ с использованием уравнения (4.6). Легко видеть, что даже на небольших расстояниях (т.е. менее 10 а.е.) различия незначительны. Аналогично, на рисунке 34 мы сравнили скорость исследуемой частицы в области СМЧД в ОТО и в области точечной массы  $M_{\text{ЧД}}$  в НГ с использованием уравнения (4.7). Снова становится ясно, что различия между ОТО и НГ появляются только на коротких расстояниях.

На рисунках 35-36 мы сравнили гравитационный потенциал для ТМ и ЧД между ОТО и НГ. Ясно, что различия между потенциалами в ОТО и НГ проявляются очень близко к центру галактики на расстояниях порядка 10 а.е. и меньше.

Кроме того, чтобы подчеркнуть небольшие различия между моделями НГ и ОТО на предыдущих рисунках, мы показали их соотношение на рисунках 37-38. В частности, на рисунке 37 мы построили график соотношения линейных скоростей пробных частиц в НГ и ОТО в гравитационных полях темной материи (чёрная пунктирная кривая) и чёрной дыры (чёрная сплошная кривая) соответственно. В случае темной материи при  $r = 0$  соотношение становится постоянным, а при большом  $r$  оно стремится к единице, как и ожидалось. Что касается чёрной дыры, то это соотношение стремится к нулю по мере уменьшения  $r$  и при большом  $r$  оно стремится к единице. На рисунке 38 мы строим график соотношения гравитационных потенциалов в НГ и ОТО для тёмной материи (чёрная пунктирная кривая) и чёрной дыры (чёрная сплошная кривая) соответственно. В случае темной материи поведение соотношения аналогично поведению линейной скорости, как показано здесь на рисунке 37. То же самое верно и для случая чёрной дыры: при меньшем  $r$  отношение стремится к нулю, а при большом  $r$  отношение стремится к единице.

В таблице 13 мы сравнили численные значения величин  $g^2/c^2$  и гравитационного потенциала  $\Phi/c^2$  для пробной частицы в полях СМЧД и ТМ.

Мы можем подвести итог сравнения между случаем ОТО и случаем НГ, подчеркнув, что для разных значений гравитационных радиусов на расстоянии  $r_g/r$ , скоростей  $\mathcal{G}^2/c^2$  и гравитационного потенциала  $\Phi(r)/c^2$  мы получаем разные значения отклонения НГ от ОТО:

(а) При  $r \approx 9,9$  а. е. максимальное отношение  $r_g/r$  для ТМ составляет  $5,5 \times 10^{-3} \ll 1$ , это означает, что гравитационное поле ТМ относительно слабое, и поэтому можно использовать НГ (см. рисунок 32 и таблица 12).

(б) Для расстояний  $r > 8,3$  а. е. относительная погрешность между линейной скоростью  $\mathcal{G}^2/c^2$  пробных частиц в поле ЧД в ОТО и НГ  $[1 - (v_{НГ}/v_{ОТО})^2] \times 100\%$  становится меньше 1%, поэтому ньютоновскую формулу можно использовать начиная с 8,3 а. е. и больше.

(в) Относительная погрешность скоростей  $[1 - (v_{НГ}/v_{ОТО})^2] \times 100\%$  в поле ТМ всегда составляет менее 0,63% при любом  $r$ , это означает, что можно использовать ньютоновские выражения для распределения ТМ, следовательно, достаточно изучить ТМ в НГ (см. рисунки 33-34 и таблица 13).

(г) Относительная погрешность гравитационных потенциалов ЧД  $[1 - (\Phi_{НГ}/\Phi_{ОТО})^2] \times 100\%$  в НГ и ОТО становится меньше, чем 1% при  $r > 4,16$  а. е.

(д) Относительная погрешность гравитационных потенциалов ТМ  $[1 - (\Phi_{НГ}/\Phi_{ОТО})^2] \times 100\%$  в НГ и ОТО всегда меньше, чем 0,45% при любом  $r$  (см. рисунки 35-36 и таблица 13).

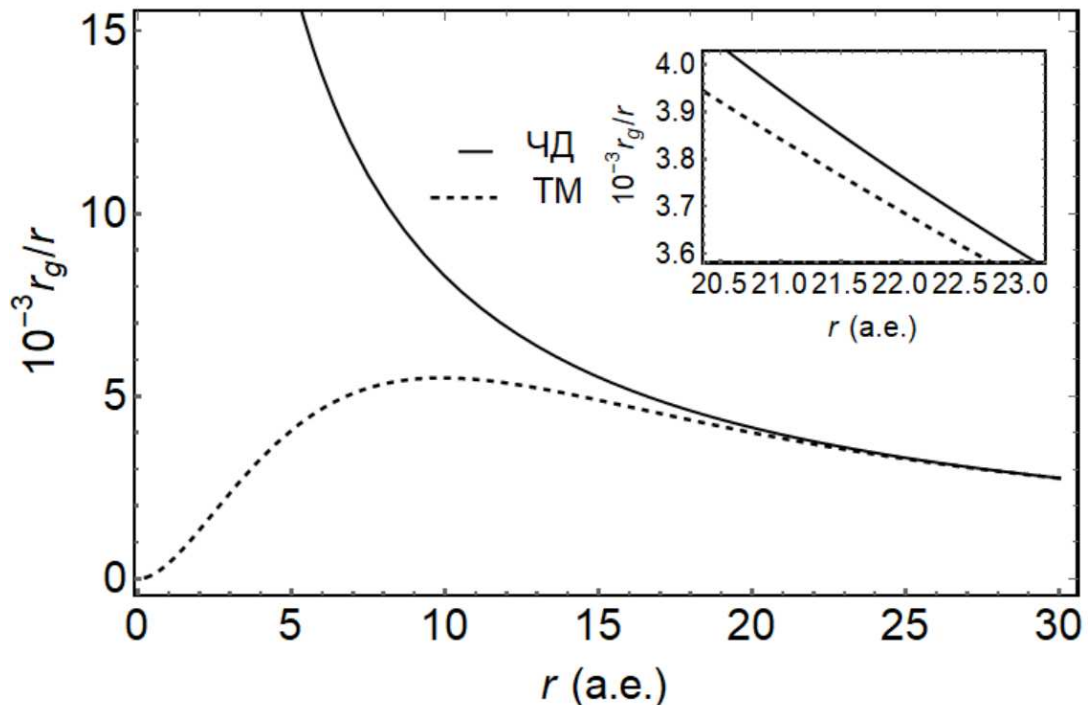


Рисунок 32 – Зависимость  $r_g/r$  от  $r$  для чёрной дыры и тёмной материи. Сплошная чёрная кривая соответствует случаю чёрной дыры, в то время как пунктирная чёрная кривая соответствует распределению тёмной материи.

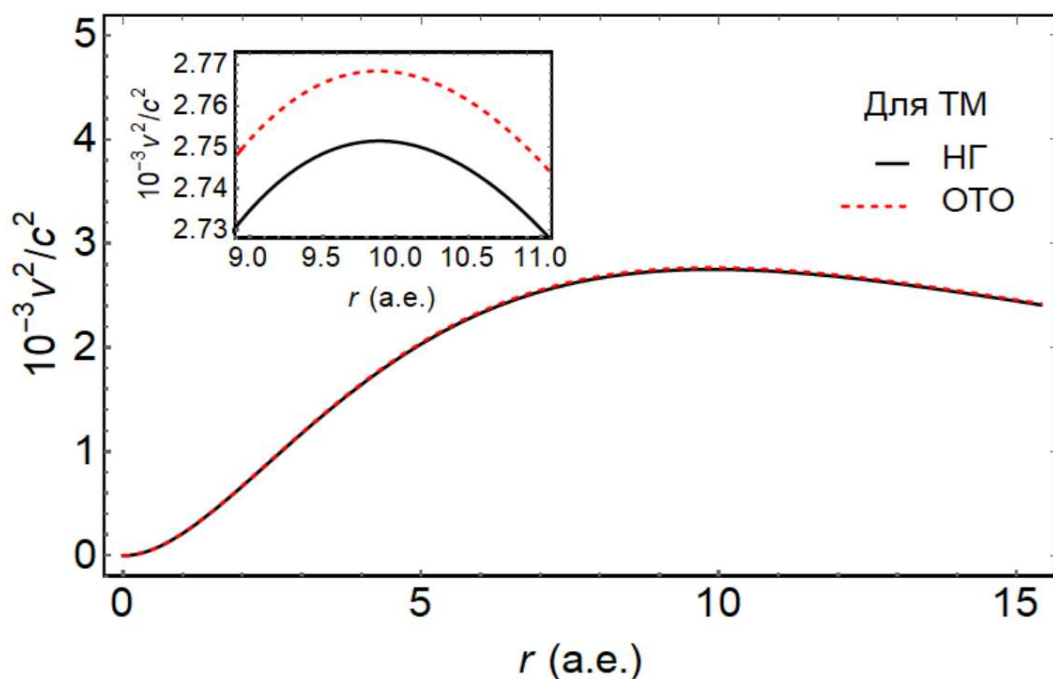


Рисунок 33 – Зависимость линейной скорости пробной частицы от радиальной координаты в поле тёмной материи без учета сверхмассивной чёрной дыры для круговых орбит как в Ньютоновской гравитации, так и в общей теории относительности. Сплошная чёрная кривая описывает функцию  $v^2/c^2$  в Ньютоновской гравитации, а пунктирная красная кривая в общей теории относительности

Таблица 12 – Сравнение гравитационного радиуса по радиальному расстоянию  $r_g/r$  для чёрной дыры и тёмной материи в Ньютоновской гравитации и общей теории относительности на различных расстояниях  $r$

$r$ (в а.е.)	$10^{-3} r_g / r$ для ТМ	$10^{-3} r_g / r$ для ЧД
0,5	0,122	165,805
1	0,429	82,904
5	4,073	16,581
10	5,508	8,290
20	4,007	4,145
30	2,757	2,763
40	2,072	2,073
50	1,658	1,658

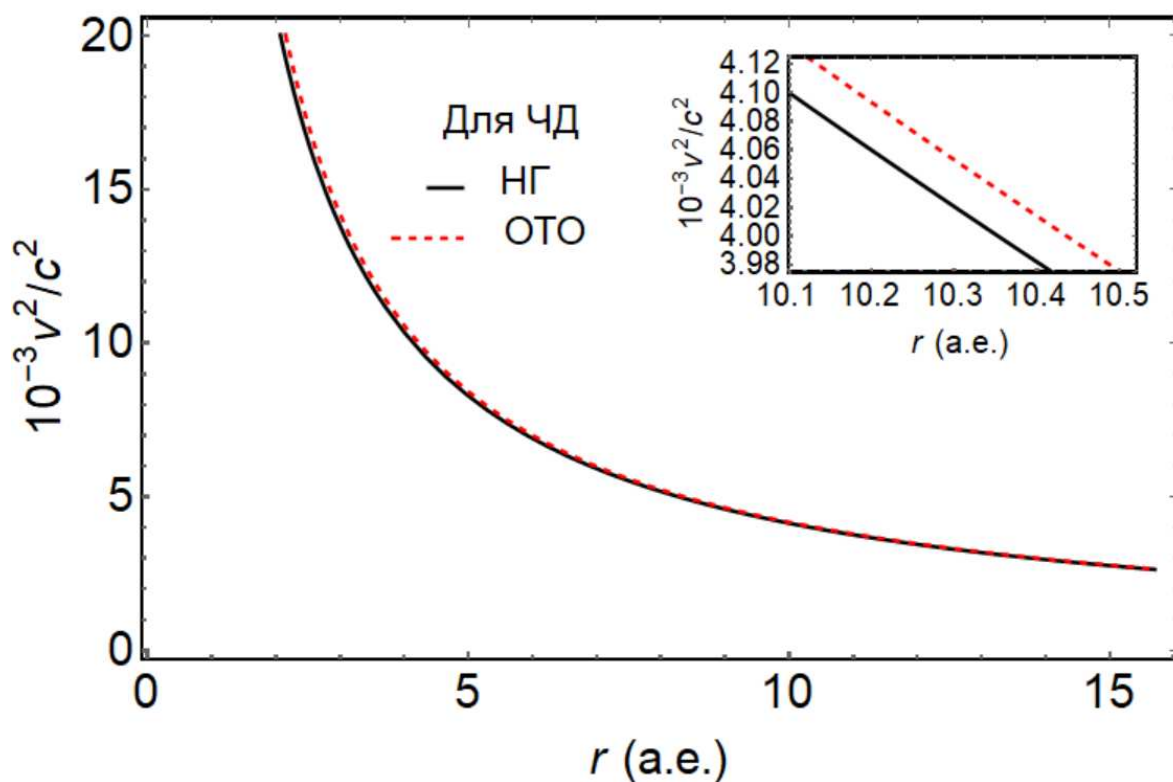


Рисунок 34 – Зависимость линейной скорости пробной частицы от радиальной координаты в поле сверхмассивной чёрной дыры без тёмной материи для круговых орбит как в Ньютонской гравитации, так и в общей теории относительности. Сплошная чёрная кривая описывает функцию  $v^2/c^2$  в Ньютонской гравитации, а пунктирная красная кривая в общей теории относительности

Таблица 13 – Сравнение скорости пробной частицы  $v^2/c^2$  в полях чёрной дыры и тёмной материи, гравитационного потенциала  $\Phi/c^2$  чёрной дыры и тёмной материи в двух случаях в Ньютонской гравитации и общей теории относительности на разных расстояниях

$r(a.e.)$	$10^{-3}(v/c)^2$	$10^{-3}(v/c)^2$	$10^{-3}(v/c)^2$	$10^{-3}(v/c)^2$	$10^{-3}(\Phi/c^2)$	$10^{-3}(\Phi/c^2)$	$10^{-3}(\Phi/c^2)$	$10^{-3}(\Phi/c^2)$
0,25	0,0162	0,0162	165,8	248,06	-7,083	-7,11	-165,80	-201,44
0,5	0,0609	0,0610	82,902	99,38	-7,06	-7,09	-82,903	-90,644
1	0,2146	0,2152	41,451	45,198	-6,974	-7,0	-41,451	-43,271
2	0,669	0,671	20,725	21,621	-6,694	-6,72	-20,726	-21,167
5	2,036	2,048	8,290	8,43	-5,51	-5,53	-8,290	-8,36
10	2,754	2,771	4,145	4,180	-3,778	-3,79	-4,145	-4,162
20	2,003	2,011	2,073	2,081	-2,063	-2,06	-2,072	-2,077
30	1,379	1,382	1,382	1,385	-1,381	-1,38	-1,382	-1,384
40	1,036	1,038	1,036	1,038	-1,036	-1,03	-1,036	-1,037
50	0,829	0,83	0,829	0,83	-0,829	-0,83	-0,829	-0,83

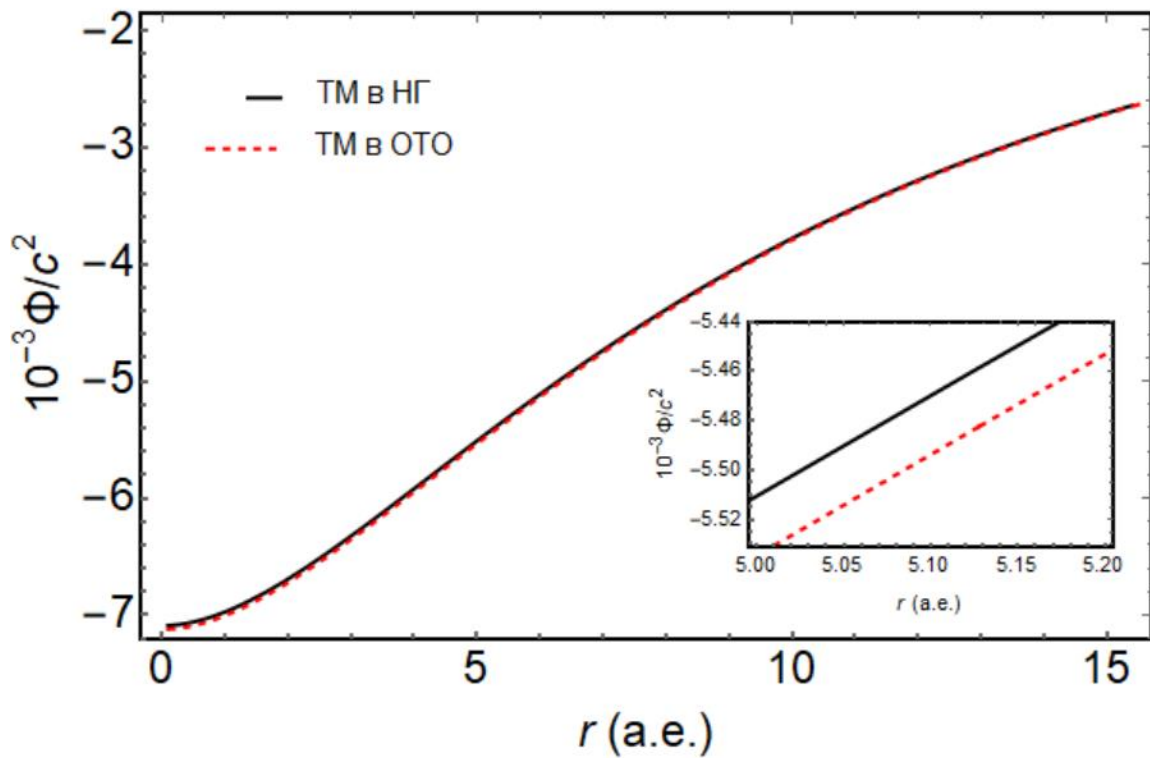


Рисунок 35 – Сравнение гравитационного потенциала вблизи галактического центра для распределения тёмной материи в общей теории относительности и Ньютоновской гравитации

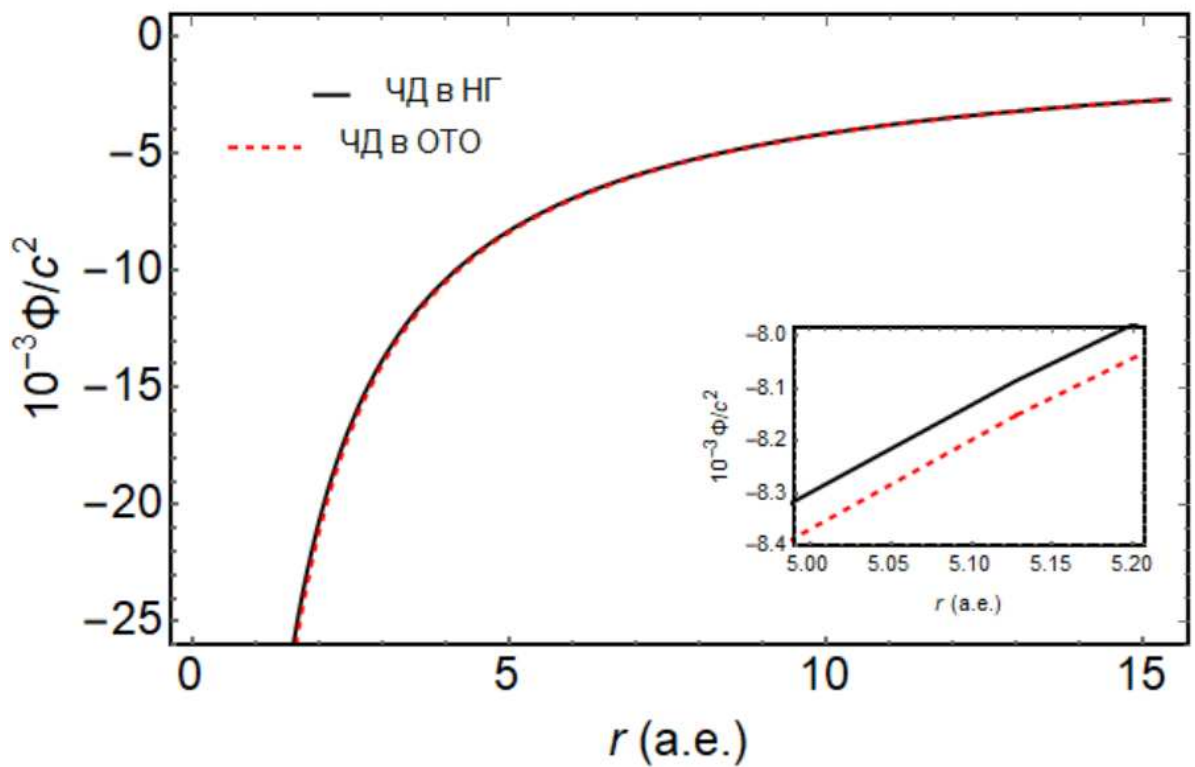


Рисунок 36 – Сравнение между гравитационным потенциалом чёрной дыры в общей теории относительности и потенциалом точечной частицы той же массы в Ньютоновской гравитации



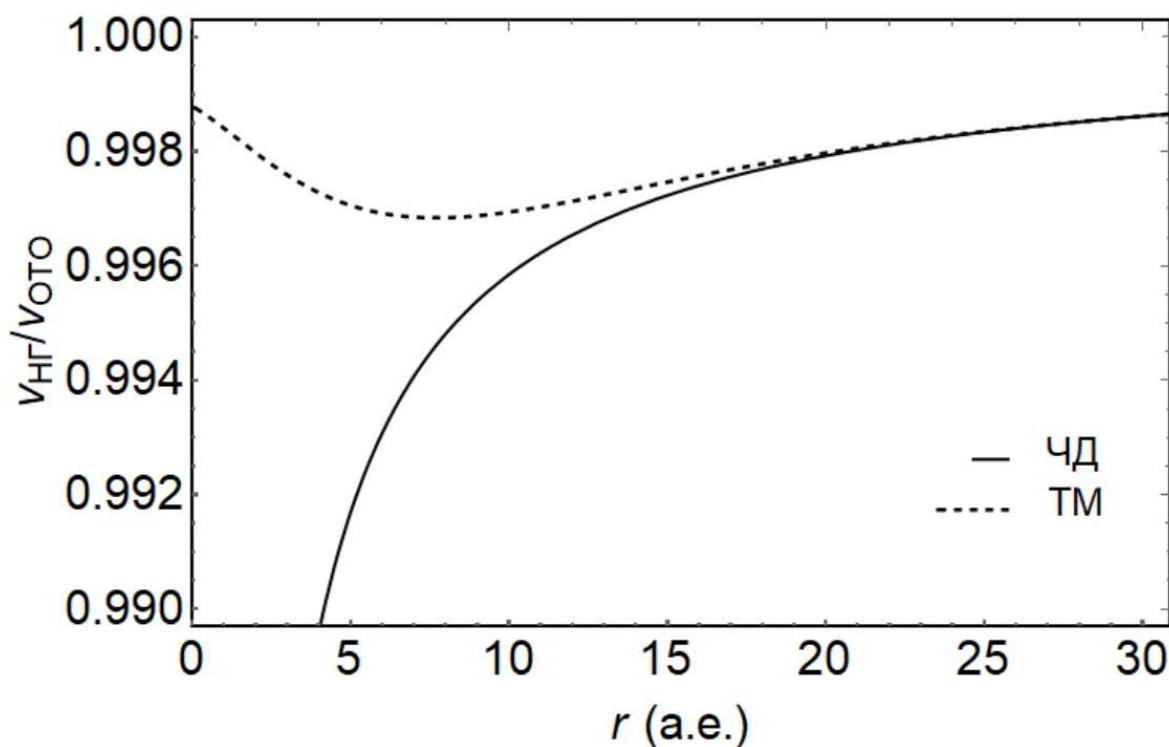


Рисунок 37 – Соотношение между скоростями пробных частиц в Ньютоновской гравитации и общей теории относительности показана как функция радиального расстояния для тёмной материи (пунктирная линия) и чёрной дыры (сплошная линия)

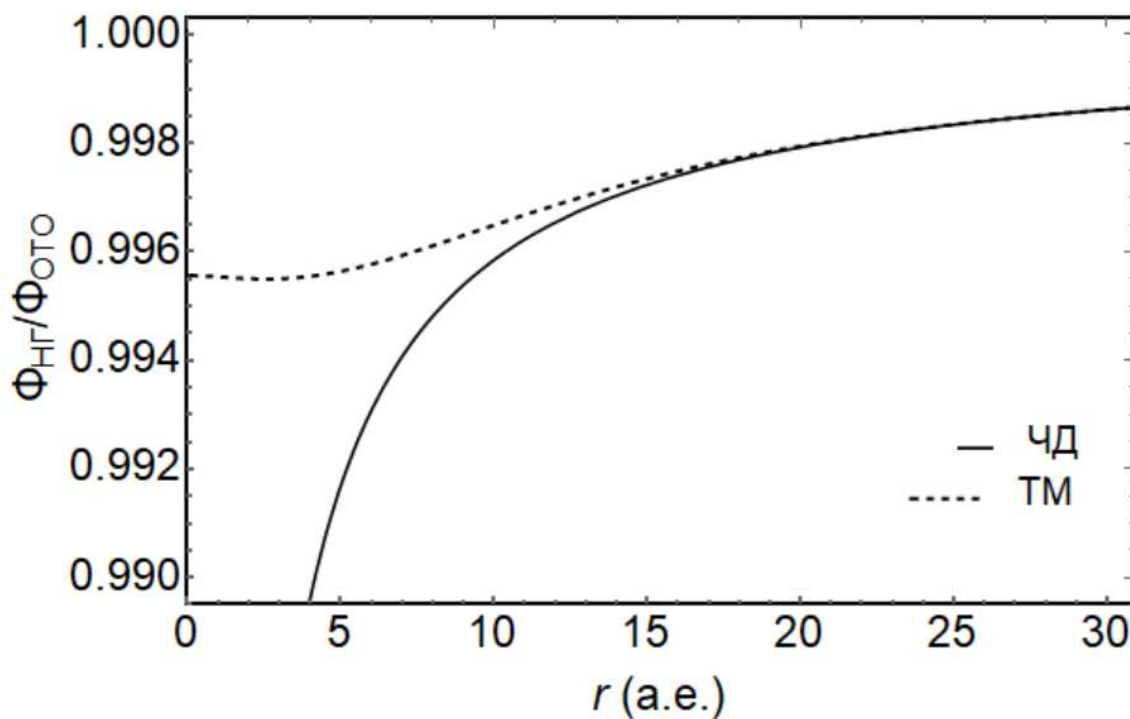


Рисунок 38 – Соотношение между гравитационными потенциалами в Ньютоновской гравитации и общей теории относительности, показанное на рисунке 35-36 в зависимости от радиального расстояния для тёмной материи (пунктирная линия) и чёрной дыры (сплошная линия)

#### 4.7 Линзирование тёмной материей

Здесь нами рассмотрено распространение света в гравитационных полях распределения ТМ и ЧД. В ОТО уравнения движения исследуемой частицы определяются через геодезические уравнения в искривленном пространстве-времени, кривизна которого порождается тензором энергии-импульса. Гравитационное поле галактики аппроксимируется статической и сферически симметричной метрикой пространства-времени (4.1).

Преобразуя сферические координаты, используемые в метрике (4.1), в изотропные координаты [139], мы можем переписать линейный элемент следующим образом:

$$ds^2 = e^{\frac{2\Phi(r)}{c^2}} \left[ c^2 dt^2 - n(\tilde{r})^2 (d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2 d\Omega^2) \right] \quad (4.24)$$

где дифференциальное уравнение, связывающее изотропную координату  $\tilde{r}$  со сферической координатой  $r$ , имеет вид:

$$\frac{d\tilde{r}}{dr} = \frac{\tilde{r}}{r \sqrt{1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}}}, \quad (4.25)$$

где введён скалярный эффективный показатель преломления сферически симметричного гравитационного поля как:

$$n(\tilde{r}) = \frac{r}{\tilde{r}} e^{\Phi(\tilde{r})} \quad (4.26)$$

Интегрируя уравнение (4.25), находим:

$$\tilde{r} = e^{\int \frac{dr}{r \sqrt{1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}}}} \quad (4.27)$$

где показатель преломления в поле ТМ и ЧД в режиме слабого поля выражается как:

$$n(r) = \begin{cases} 1 + \frac{2GM_{\text{ЧД}}}{c^2 r} & \text{для ЧД} \\ 1 - \frac{\Phi(r)}{c^2} - \int \frac{GM(r)}{c^2 r} dr & \text{для ТМ} \end{cases} \quad (4.28)$$

Показатель преломления вычислен для ядра ГМП, где СМЧД с массой  $M_{\text{чд}}$ , а ТМ с распределением массы  $M(r)$ .

Используя формулу (4.28), нами построен график зависимости  $n(r)$  от  $r$  в гравитационных полях ТМ и ЧД рисунок 39, хорошо видно, что начиная с  $r \approx 10$  а. е. кривые начинают сходиться. Отсюда следует, что до этого значения показатель преломления в поле ЧД больше, чем у ТМ.

Используя уравнение (4.26), мы построили график показателя преломления ЧД в НГ и ОТО. На рисунке 40 видно, что ньютоновское описание показателя преломления достаточно хорошо для расстояний, превышающих  $r \approx 1$  а. е.

Поскольку потенциал ТМ меньше, чем потенциал ЧД, можно сказать, что, используя ньютоновское описание, мы все еще можем различить два случая с помощью линзирования для наблюдений в диапазоне примерно от 1 до 10 а. е. С другой стороны, наблюдения гравитационного линзирования на расстояниях больше, чем 10 а. е. от центра, можно было бы описать с помощью НГ.

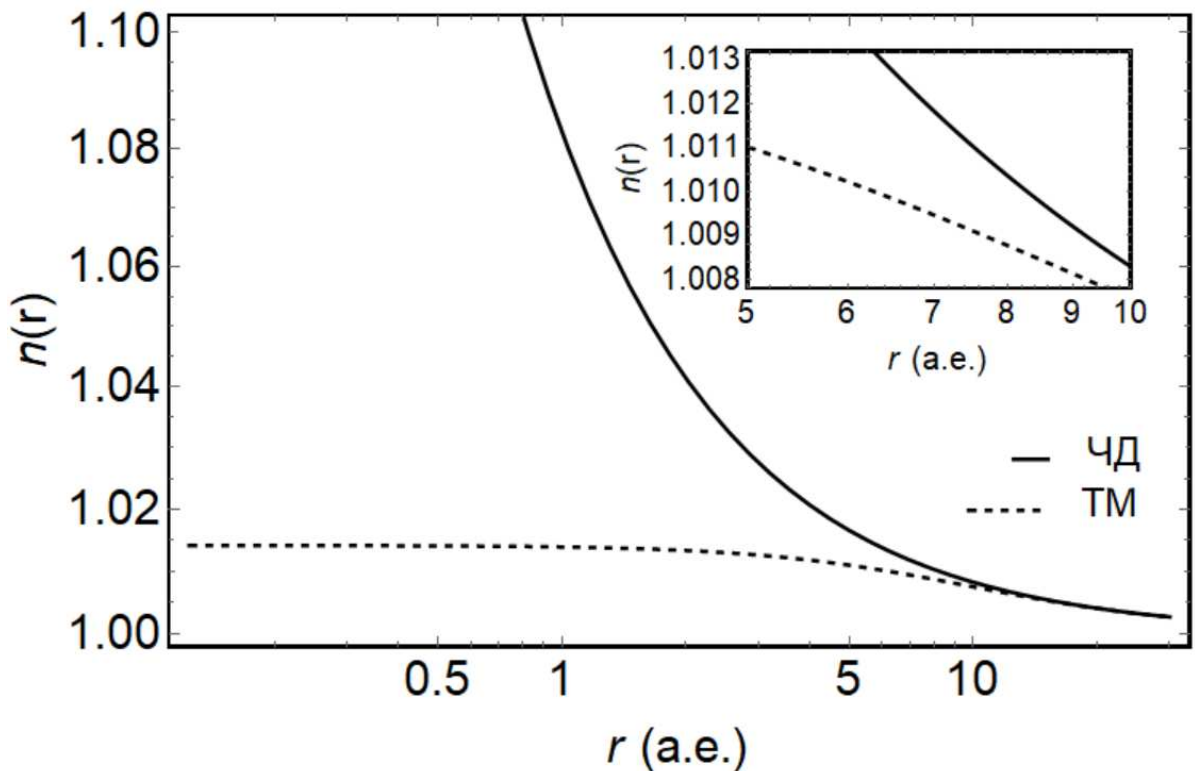


Рисунок 39 – Показатель преломления тёмной материи (пунктирная чёрная кривой) и чёрной дыры (сплошная чёрная кривая) в Ньютоновской гравитации

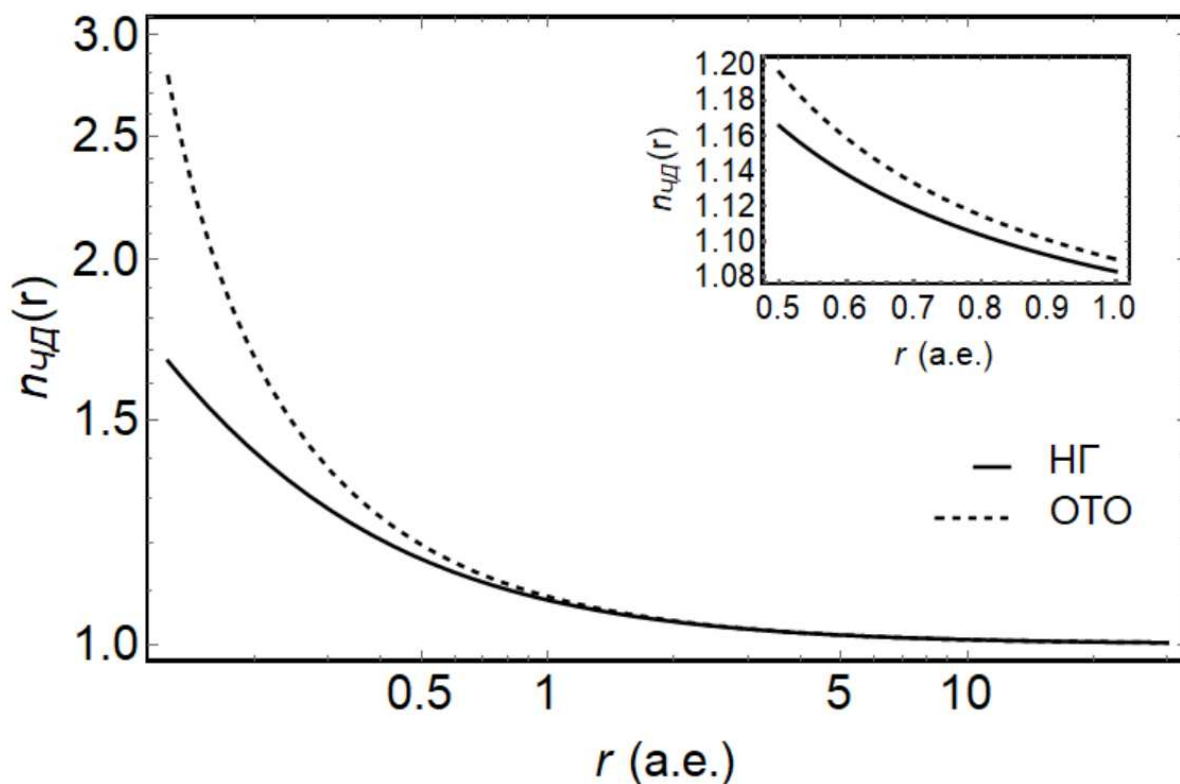


Рисунок 40 – Показатель преломления в области чёрной дыры в Ньютоновской гравитации (сплошная чёрная кривая) и общей теории относительности (пунктирная чёрная кривой)

Эти результаты согласуются с тем, что было найдено в [118, p.1120], где изучался показатель преломления в гравитационном поле чёрной дыры, окруженной оболочкой ТМ. Разница в показателе преломления при наличии и отсутствии огибающей ТМ была небольшой, но все же не пренебрежимо малой. Конечно, наблюдения пока не позволяют исследовать такие расстояния от центрального объекта ни в ГМП, ни в других галактиках, но есть надежда, что будущие наблюдения позволят начать накладывать некоторые ограничения на возможное существование профилей ТМ в центре галактик и, в частности, улучшить наше понимание Sgr A\*.

#### 4.8 Выводы по 4 разделу

Нами рассмотрена модель распределения ТМ в ГМП, где УС для ТМ имеет неисчезающее давление и скорость звука. Для гало галактики мы рассмотрели различные профили ТМ и пришли к выводу, что экспоненциальная сфера хорошо подходит для текущих наблюдений. Для ядра галактики мы рассмотрели два экстремальных сценария: один со СМЧД в вакууме, а другой с профилем экспоненциальной сферы ТМ без СМЧД, с идеей, что в более реалистичной ситуации масса ядра была бы разделена между ТМ и СМЧД.

Для других компонент галактики (диск, основной и внутренний балдж) также был применен профиль экспоненциальной сферы.

Мы решили уравнения гидростатического равновесия, чтобы получить соотношение между плотностью и давлением профилей ТМ, следовательно, получили оценку скорости звука в жидкости галактики ТМ.

Также кратко обсуждалось влияние, которое оказывает исчезающее УС на движение звезд в галактике.

Для ядра галактики, мы показали, что имеющиеся наблюдения движения S-звезд вокруг Sgr A\*, либо тени центрального объекта в M87 недостаточны, чтобы определить, является ли объект чистым ядром ТМ или СМЧД в вакууме. Поэтому, предполагая, что в реалистичном сценарии ядро галактики содержит как ЧД, так и ТМ. Текущие наблюдения не позволяют накладывать ограничения на массовое соотношение двух составляющих. В частности, мы оценили показатель преломления, полученный на основе принципа Ферма, из-за особенностей ядра профиля ТМ. Мы показали, что в случае ГМП эффекты гравитационного линзирования из-за ЧД без ТМ или из-за ТМ без ЧД показывают заметные различия только на расстояниях  $10a.e.$  или менее от центра галактики. Это означает, что текущие наблюдения за движением звезд, таких как S2, которые существуют в окрестностях Sgr A\*, не позволяют отличить предлагаемое распределение ТМ от СМЧД. В свете недавних наблюдений ближайших звезд около галактического центра будет интересно рассмотреть в будущих исследованиях движения звезд, используя нашу модель по аналогии с работой [140].

## 5 ДВИЖЕНИЕ ЗВЕЗД ВБЛИЗИ ЦЕНТРА ГАЛАКТИКИ МЛЕЧНЫЙ ПУТЬ

В последнее время в литературе часто обсуждаются наиболее актуальные проблемы современной астрофизики и космологии, такие как проблема образования сверхмассивных чёрных дыр и природа тёмной материи [141]. Актуальность первой темы связана с последними результатами наблюдений слияния чёрных дыр с помощью Лазерного интерферометра Гравитационно-волновой обсерватории [142,143], с наблюдением тени чёрной дыры в галактике M87 с помощью телескопа Горизонт событий [144,145], а также с наблюдениями очень далеких квазаров — одного из самых ярких объектов во Вселенной [146], что почти не оставило сомнений в существовании сверхмассивных чёрных дыр. Считается, что квазары излучают энергию за счет высвобождения потенциальной гравитационной энергии газа, падающего на сверхмассивную чёрную дыру (обычно с массой в несколько миллиардов солнечных масс [118 p.1120]). Поскольку квазары были обнаружены не позднее, чем через 650 миллионов лет после "начала" расширения Вселенной, то, вероятно, СМЧД должны были образоваться уже раньше. С теоретической точки зрения совершенно неясно, какие именно процессы/обстоятельства привели к образованию таких компактных и массивных объектов за относительно короткое время.

С другой стороны, что касается тёмной материи, то в настоящее время нет прямых доказательств ее существования, но есть множество косвенных наблюдений. Все они в основном основаны на специфическом поведении астрофизических объектов, в частности, на аномально высокой скорости вращения внешних областей галактик [147,148]. Кроме того, о наличии ТМ свидетельствуют движение сгустков горячего газа в скоплениях галактик и гравитационное линзирование [149].

Исследования движения S-звезд вблизи центра галактики Млечный Путь недавно показали, что гравитационный потенциал, в котором они движутся, определяется массивным компактным источником в центре, Sgr A\*. Как было показано в литературе [150,151] масса Sgr A\* равна, той же массе, которая традиционно ассоциируется с массой СМЧД. Однако последние наблюдения объекта G2 показывают, что его траектория не может быть полностью объяснена с точки зрения геометрии ЧД [152]. Вместо этого, как было показано в [140, p.16] что движение объекта G2 может быть хорошо объяснено так называемой моделью Руффини-Аргельес-Руеда, предлагающей альтернативную природу Sgr A\*, основанную на фермионной модели ТМ которая приводит к плотному ядру и разбавленному профилю плотности гало [34]. Модель РАР была успешно применена к движению S-звезд вокруг центра галактики, обеспечивая в некоторых случаях лучшие результаты по сравнению со случаем

СМЧД [153]. Таким образом, модель РАР явно продемонстрировала, что природа ТМ Sgr A\* вполне жизнеспособна.

В этой работе мы изучаем движение пробных частиц в форме звезд вблизи центра ГМП в гравитационном поле как ядра ЧД, так и ядра ТМ [154]. В частности, здесь мы рассмотрим уменьшенную модель, сформулированную в статье [124, р.3530], основанную на профиле экспоненциальной сферы ТМ, впервые представленном в статье [12, р. 118]. Этот подход может быть использован для моделирования распределения плотности ТМ во внутренней части ГМП.

Стоит отметить, что с учетом текущих наблюдений возможны два сценария: 1) существует СМЧД без распределения ТМ и 2) в центре галактики есть ядро ТМ без какой-либо ЧД. В принципе, невозможно отличить два отдельных случая друг от друга на расстояниях, превышающих 100 а.е.

Цель данного раздела - исследовать движение звезд вблизи центра галактики на расстояниях меньше 100 а.е. и показать, что различия между этими двумя случаями проявляются на расстояниях меньше 30 а.е.

Раздел организован следующим образом: в подразделе 5.1 мы рассмотрим профиль экспоненциальной сферы и обсудим его особенности для ядра ГМП. Также мы покажем, что ньютоновской гравитации вполне достаточно для наших анализов. В подразделе 5.2 мы записываем уравнения движения звезд вблизи центра галактики в ньютоновской гравитации. В подразделе 5.3 приводим результаты, полученные путем численного интегрирования уравнений движения. Наконец, в заключении раздела кратко обсудим возможные будущие наблюдения, которые могут помочь проверить правильность предлагаемой модели. Наши выводы также кратко изложены там.

### **5.1 Экспоненциальная сфера**

Распределение ТМ в гало галактики обычно широко интерпретируется профилями Эйнаста [9, р.75], Буркерта [11, L25], Наварро-Френка-Уайта [7, р.564], псевдо-изотермическими [10, р.247] и т.д. [133, р. 15]. Для галактического центра, в литературе не так много профилей, хотя были некоторые наблюдения, указывающие на присутствие ТМ в центральной области галактик [155]. Здесь нами принят так называемый профиль экспоненциальной сферы, впервые предложенный в работе [118 р.1120], для того чтобы объяснить кривую вращения в балдже (основной и внутренней) ГМП. Ранее были проанализированы данные кривой вращения ГМП вблизи центра, используя профиль экспоненциальной сферы, предполагающий отсутствие СМЧД [114]. Аналогичные анализы были проведены также для СМЧД, где её гравитационное поле доминирует в отсутствие ТМ. Кривая вращения вблизи центра галактики хорошо соответствовала обоим сценариям

Итак, оказалось, что не только внутренний и основной балдж, но и ядро галактики можно хорошо смоделировать с помощью экспоненциального профиля сферы, который задан (4.10). В таблице 1 работы [124, р.3530] показано, что свободные параметры имеют следующие значения

$\rho_0 = 5.873 \times 10^{19} M_\odot / \text{пк}^3$  и  $r_0 = 1.417 \times 10^{-5} \text{пк} = 2.923 \text{ а.е.}$ , когда не было никаких ограничений на размер и массу ядра галактики.

Зная форму профиля плотности (4.10), можно легко рассчитать профиль массы, которая задан (2.2).

Следует отметить, что численные результаты фиттинга показывают, что общая масса ТМ в ядре равна массе СМЧД из альтернативного сценария т.е.  $M_0 = M_{\text{чд}}$ .

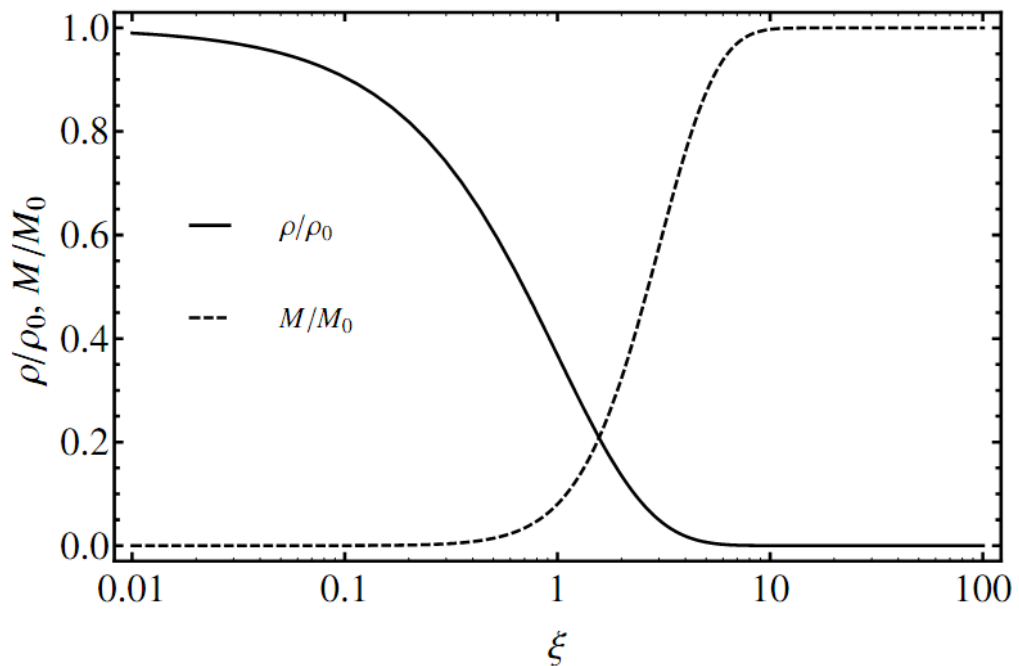


Рисунок 41 – Профили плотности и массы модели экспоненциальной сферы

На рисунке 41 мы показываем профили плотности и массу профиля экспоненциальной сферы, заданные уравнениями (4.10) и (2.2). Вблизи центра плотность становится постоянной, а вдали от центра она уменьшается экспоненциально. Вместо этого масса на расстояниях больше  $\xi = 10$  или  $r \approx 30 \text{ а.е.}$  становится почти постоянной.

Перед изучением движения пробных частиц (звезд) вблизи центра галактики, нами были проанализированы линейная скорость и гравитационный потенциал пробных частиц как в ньютоновской гравитации, так и в ОТО, чтобы убедиться, что наши вычисления в НГ не нарушают режимы замедленного движения и слабого поля. В таблице 13 приведены численные значения линейной скорости  $v^2/c^2$  и гравитационного потенциала  $\Phi/c^2$ , для исследуемой частицы в полях распределения СМЧД и ТМ. Как видно из этого, вклад ОТО в ТМ незначителен. В случае ЧД (или точечной массы в НГ) эффекты ОТО становятся доминирующими на расстояниях, меньших 5 а.е. для обеих физических величин. Таким образом, можно выполнять все анализы в НГ.



Следует отметить, что для более точного анализа в любом случае следует обращаться к ОТО, поскольку небольшие эффекты, обусловленные коррекциями ОТО, могут накапливаться в течение нескольких миллионов или даже миллиардов лет и изменять всю картину рассматриваемой системы. Однако в течение короткого времени масштабирование НГ работает достаточно хорошо.

## 5.2 Уравнения движения звезд

В этом подразделе рассмотрим два случая, аналогично работе [124, p.3530], а именно:

1. Предполагается, что в галактическом центре есть СМЧД без ТМ.
2. Предполагается, что в центре галактики существует распределение ТМ без СМЧД.

Эти два случая считаются предельными случаями, хотя всегда существует возможность иметь сочетание обоих одновременно, как это было проиллюстрировано в работе [118 p.1120]. Для вышеуказанных случаев мы будем использовать вышеуказанные обозначения (4.20).

В данном подразделе мы рассматриваем движение пробных частиц в гравитационных полях распределения СМЧД и ТМ с целью отличить два источника от наблюдения звезд, вращающихся вокруг центра галактики. Чтобы описать движение пробной частицы в поле ТМ и СМЧД, необходимо записать уравнения движения. С этой целью используем второй закон Ньютона и закон всемирного тяготения:

$$\vec{F}_N = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (5.1)$$

$$\vec{F}_G = -m \frac{GM}{r^3} \vec{r} \quad (5.2)$$

где  $m$  - масса пробной частицы,  $M$  - масса центрального тела (ЧД или точечная масса в НГ) или профиль массы ТМ (см. Уравнение 4.20),  $r$  - радиальная координата (расстояние от центра галактики до рассматриваемой точки). Приравнявая обе силы, мы получаем уравнение движения:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3} \vec{r} \quad (5.3)$$

Так как для простоты мы изучаем движение пробных частиц в  $xu$  плоскости, тогда  $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y$  и  $r^2 = x^2 + y^2$ . Соответственно, уравнение (5.3) разбивается на две составляющие как:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GMx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GM y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \end{cases} \quad (5.4)$$

Из определения гравитационного потенциала:

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r} \quad (5.5)$$

получаем формулы для линейной скорости пробной частицы в гравитационном поле точечной массы и ядра ТМ:

$$v = \begin{cases} \sqrt{\frac{GM_{\text{чД}}}{r}}, & \text{для ЧД,} \\ \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}, & \text{для ТМ,} \end{cases} \quad (5.6)$$

Давайте для полноты покажем взаимосвязь между силой и потенциалом гравитационного поля для ЧД и ТМ в НГ.

$$\vec{F}_G = -m\vec{\nabla}\Phi = -m\frac{d\Phi}{dr}\frac{\vec{r}}{r} = -m\frac{GM}{r^3}\vec{r} \quad (5.7)$$

где

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_{ex} = -\frac{GM_{\text{чД}}}{r}, & \text{для ЧД,} \\ \Phi_{in} = -\frac{GM_0}{r} \left[ 1 - e^{-\frac{r}{r_0}} \left( 1 + \frac{r}{2r_0} \right) \right], & \text{для ТМ,} \end{cases} \quad (5.8)$$

здесь  $\Phi_{ex}$  является внешним гравитационным потенциалом сферически симметричного или точечного тела и  $\Phi_{in}$  - внутренним потенциалом, описывающим распределение ТМ в ядре галактики. Хорошо известно, что решение уравнений движения (5.4) для пробной частицы, вращающейся вокруг точечной массы, гравитационный потенциал которой задается  $\Phi_{ex}$ , может быть получен аналитически (задача Кеплера). Однако в области ядра ТМ аналитическое решение невозможно.

### 5.3 Численные результаты

Теперь рассмотрим движение пробных частиц как в поле ядра ТМ, так и в ЧД. В ЧД вся масса сосредоточена внутри горизонта событий, возможно, в центральной сингулярности, тогда как в ТМ профиль массы пространственно изменяется в зависимости от радиальной координаты.

Как только мы установим  $r$ , где  $t=0$  в качестве начального значения, скорость будет автоматически рассчитана из уравнения (5.6). Таким образом, всегда можно найти круговые геодезические/траектории для пробных частиц в обоих полях ядра СМЧД и ТМ. Однако, чтобы различить оба объекта, мы принимаем в качестве начальных условий, условия для круговых орбит в гравитации СМЧД и используем их также для пробных частиц в области ядра ТМ. Поэтому мы следим за тем, чтобы в области СМЧД траектории всегда были круговыми, и анализируем, как они будут выглядеть в области ядра ТМ.

Численно решив систему уравнений движения (5.4) с учетом формулы для массы (4.20), мы получили траектории звезд с одинаковыми начальными условиями в гравитационном поле ядра ЧД и ТМ. Траектории звезд показаны на рисунках 42-44 с разными начальными условиями. Красные сплошные кривые показывают круговые орбиты в поле точечной массы, а чёрные пунктирные кривые показывают эллиптические орбиты в распределении ТМ. Визуальные различия между траекториями проявляются на расстояниях менее 30 а.е. Начальные условия были выбраны таким образом, чтобы получить круговые орбиты в гравитационном поле точечной массы СМЧД, которые приводят к прецессирующим эллиптическим орбитам в поле ядра ТМ. Обратите внимание, что круговые орбиты всегда находятся внутри эллиптических, а перицентры эллиптических орбит находятся на круговых орбитах.

Если выбрать начальные условия для круговых орбит только в области ядра ТМ и использовать их также для пробных частиц в области СМЧД, то получится противоположная картина, т. е. эллиптические орбиты в области СМЧД, как показано на рисунках 45-47. Теперь эллиптические орбиты находятся внутри круговых, а апоцентры эллиптических орбит находятся на круговых орбитах. Однако, эллиптические орбиты здесь не являются прецессирующими из-за того, что в НГ траектории пробных частиц в поле точечной массы не прецессируют [156]. В отличие от НГ, прецессия наблюдается даже в области точечной массы в ОТО. Для оценки смещения перицентра необходимо знать орбитальные параметры конкретных звезд вблизи центра галактики. Различия, возникающие в движении пробных частиц, могут пролить некоторый свет на природу центрального компактного объекта в ГМП при будущих более точных наблюдениях.

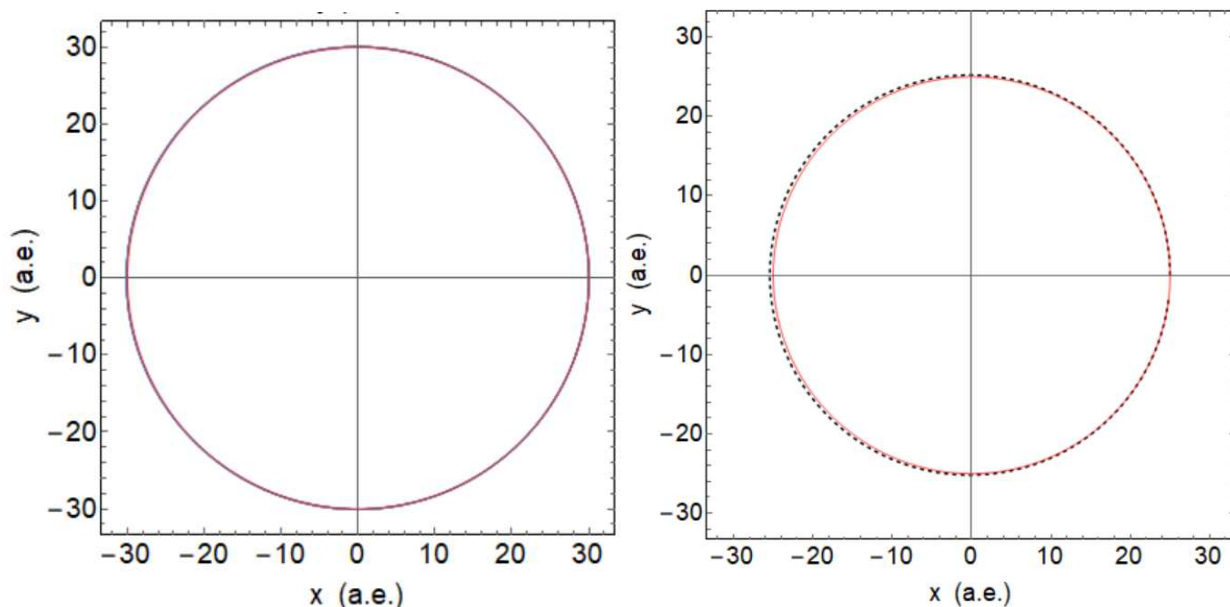


Рисунок 42 – Движение пробных частиц вблизи центра галактики. Сплошные красные и пунктирные чёрные кривые показывают движение пробных частиц в области ядра ЧД и ТМ, соответственно. Начальные условия выбираются таким образом, чтобы всегда получать круговые орбиты в поле ЧД. Левая панель:  $x(0) = 30 \text{ a.e.}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 7,4 \times 10^{-5} \text{ a.e./сек}$ , Правая панель:  $x(0) = 25 \text{ a.e.}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 8,2 \times 10^{-5} \text{ a.e./сек}$

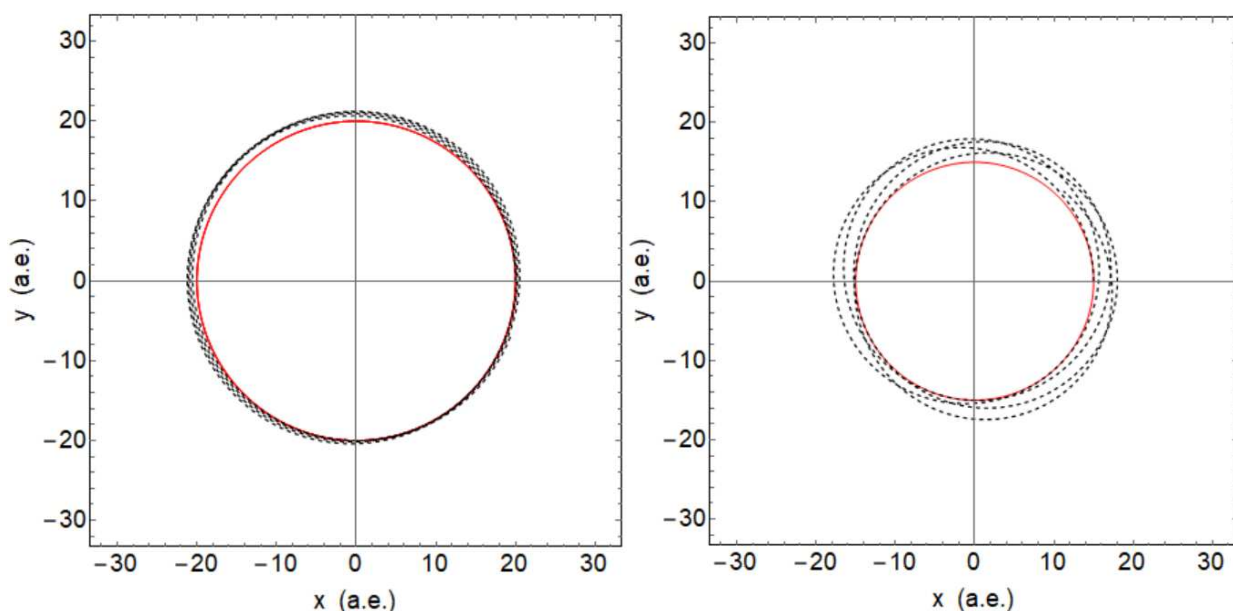


Рисунок 43 – Движение пробных частиц вблизи центра галактики. Сплошные красные и пунктирные чёрные кривые показывают движение пробных частиц в области ядра ЧД и ТМ, соответственно. Начальные условия выбираются таким образом, чтобы всегда получать круговые орбиты в поле ЧД. Левая панель:  $x(0) = 20 \text{ a.e.}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 9,1 \times 10^{-5} \text{ a.e./сек}$ , правая панель:  $x(0) = 15 \text{ a.e.}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 10,5 \times 10^{-5} \text{ a.e./сек}$

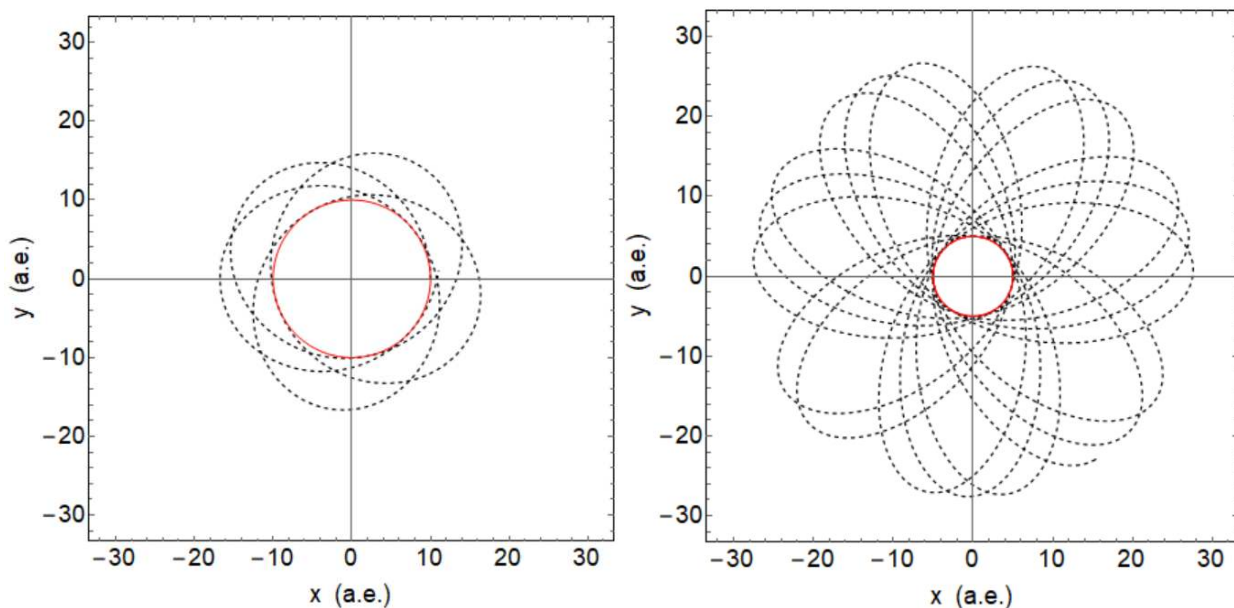


Рисунок 44 – Движение пробных частиц вблизи центра галактики. Сплошные красные и пунктирные чёрные кривые показывают движение пробных частиц в области ядра ЧД и ТМ, соответственно. Начальные условия выбираются таким образом, чтобы всегда получать круговые орбиты в поле ЧД. Левая панель:  $x(0) = 10 \text{ a.e.}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 12,9 \times 10^{-5} \text{ a.e./сек}$ , Правая панель:  $x(0) = 5 \text{ a.e.}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 18,2 \times 10^{-5} \text{ a.e./сек}$

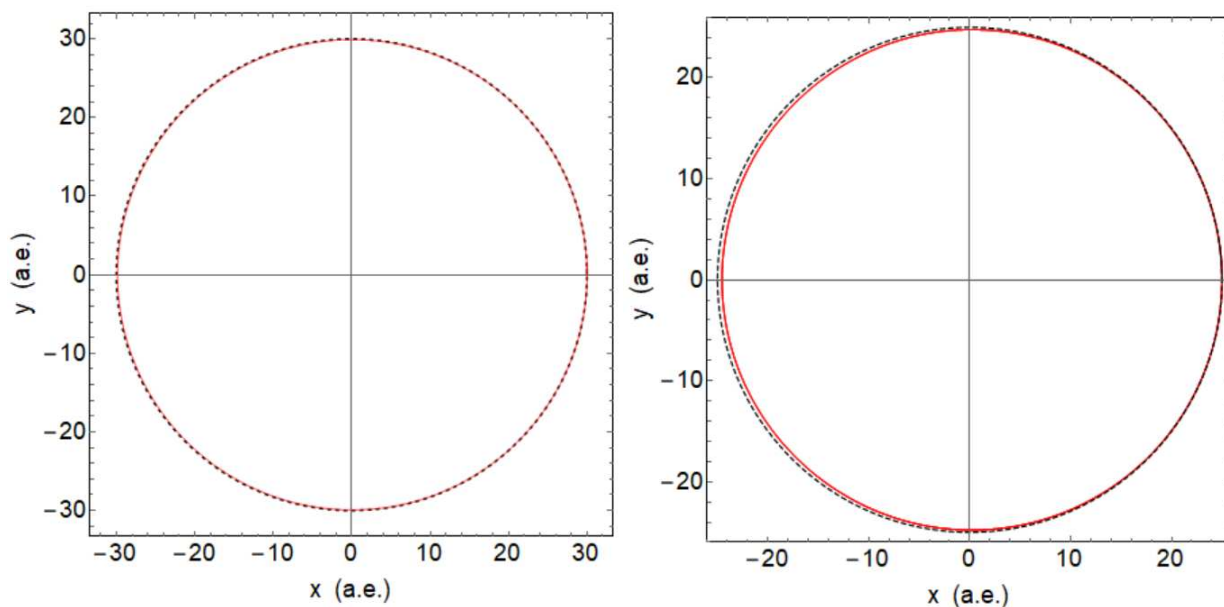


Рисунок 45 – Движение пробных частиц вблизи центра галактики. Сплошные красные и пунктирные чёрные кривые показывают движение пробных частиц в области ядра ЧД и ТМ, соответственно. Начальные условия выбираются таким образом, чтобы всегда получать круговые орбиты в поле ТМ. Левая панель:  $x(0) = 30 \text{ a.e.}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 7,4 \times 10^{-5} \text{ a.e./сек}$ , Правая панель:  $x(0) = 25 \text{ a.e.}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 8,2 \times 10^{-5} \text{ a.e./сек}$

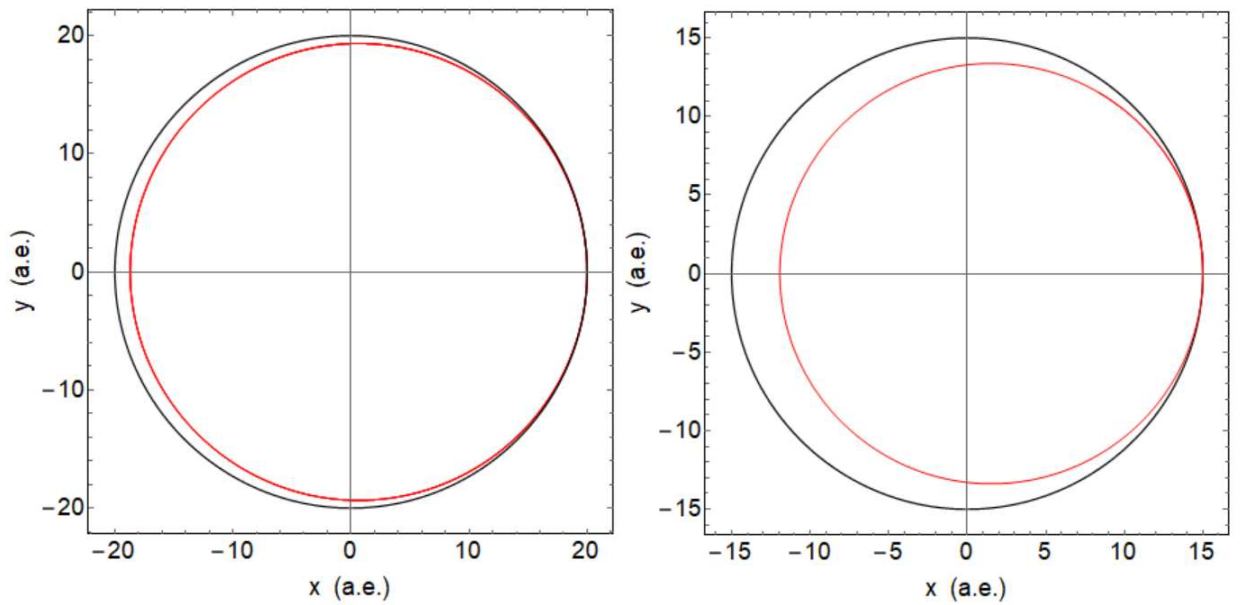


Рисунок 46 – Движение пробных частиц вблизи центра галактики. Сплошные красные и пунктирные чёрные кривые показывают движение пробных частиц в области ядра ЧД и ТМ, соответственно. Начальные условия выбираются таким образом, чтобы всегда получать круговые орбиты в поле ТМ. Левая панель:  $x(0) = 20 \text{ a.e.}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 9,0 \times 10^{-5} \text{ a.e./сек}$ , правая панель:  $x(0) = 15 \text{ a.e.}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 9,9 \times 10^{-5} \text{ a.e./сек}$

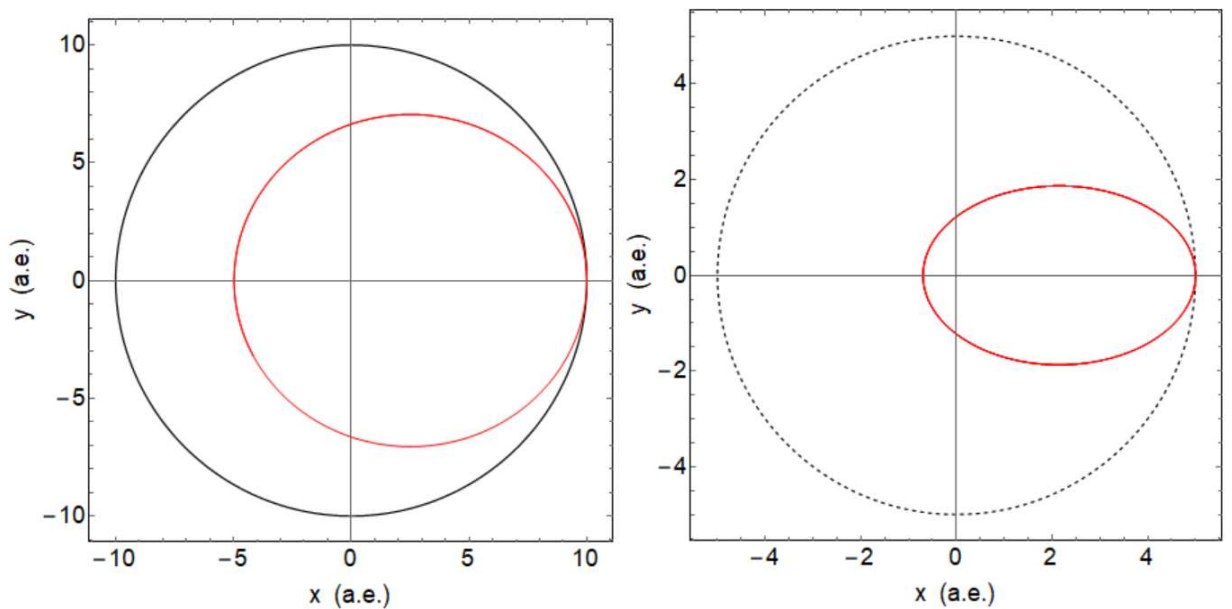


Рисунок 47 – Движение пробных частиц вблизи центра галактики. Сплошные красные и пунктирные чёрные кривые показывают движение пробных частиц в области ядра ЧД и ТМ, соответственно. Начальные условия выбираются таким образом, чтобы всегда получать круговые орбиты в поле ТМ. Левая панель:  $x(0) = 10 \text{ a.e.}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 10,5 \times 10^{-5} \text{ a.e./сек}$ , Правая панель:  $x(0) = 5 \text{ a.e.}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 9,0 \times 10^{-5} \text{ a.e./сек}$

#### 5.4 Выводы по 5 разделу

В данном разделе мы проанализировали траектории движения звезд вблизи галактического центра в гравитационном поле СМЧД и ядра ТМ. Для этого численно были решены уравнения движения пробных частиц в НГ.

Как и ожидалось, значительное расхождение в движении появляется на расстояниях менее 30 а.е., и оно увеличивается по мере приближения к центру галактики.

Это означает, что в текущих наблюдениях за движениями звезд, таких как S2, которые приближаются к Sgr A\* при 120 а.е., невозможно отличить предлагаемое ядро ТМ от СМЧД.

Для дальнейших исследований было бы интересно рассмотреть текущую модель для объекта G2 по аналогии с работой [140, p.16]. Однако, это будет вопросом будущих исследований.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе представлены исследования, проводимые в галактиках NGC 2403, NGC 3627, NGC 2976, DDO 154, NGC 1560, NGC 5585, U11454 и галактика Млечный Путь, для которых были построены кривые вращения; вычислены масса, плотность и масштабный радиус, а также был проведен качественный анализ полученных решений. Все вычисления, проведённые в диссертационной работе основываются на наблюдательных данных кривых вращения галактик, поэтому можно сказать, что теоретические результаты соответствуют экспериментальным данным. А также результаты исследования имеют ключевую роль в развитии науки, так как посвящена одной из актуальных тем астрофизики – тёмной материи.

**Основными результатами данной работы являются следующее:**

1. Были проанализированы пять спиральных и одна карликовая галактики. Сложная структура галактик не рассматривалась, и распределение тёмной материи было принято сферическим для них. Кривые вращения, построенные в этой работе, были сопоставлены с аналогичными результатами в литературе для рассмотренных галактик. В результате была оценена общая масса тёмной материи с использованием различных феноменологических профилей плотности, в рассматриваемых галактиках и сравнена с их барионными массами. Масса тёмной материи во многих случаях больше, чем видимая масса, как и ожидалось.

2. Были проанализированы наблюдательные данные кривых вращения спиральной галактики U11454, нами были выведены свободные параметры моделей с помощью метода наименьших квадратов. Было решено уравнение гидростатического равновесия: показатель преломления и скорость звука для данной галактики, с рассмотрением различных феноменологических профилей. Для наших целей профили Эйнасто и изотермический являются наиболее подходящими профилями для изучения уравнений состояния тёмной материи галактики U11454.

3. Рассмотрена модель распределения тёмной материи в галактике Млечный Путь, где уравнение состояния для тёмной материи имеет ненулевое давление. Для галактики Млечный Путь оптимальным профилем распределения тёмной материи является экспоненциальная сфера. Были решены уравнения гидростатического равновесия, чтобы получить соотношение между плотностью и давлением профилей тёмной материи, следовательно, получили оценку скорости звука в жидкости галактики тёмной материи.

4. Проанализированы траектории движения звёзд вблизи галактического центра в гравитационном поле сверхмассивной чёрной дыры в вакууме и тёмной материи без чёрной дыры. Для этого численно были решены уравнения движения пробных частиц в НГ. Было показано, что значительное расхождение в движении для двух случаев появляется на расстояниях менее 30 а.е., и оно увеличивается по мере приближения к центру галактики.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Milgrom M. A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis // *The Astrophysical Journal* – 1983. – Vol. 270. – P. 365–370.
- 2 Blioh P.V., Minakov A.A. Gravitation lenses M. // *Znanie* – 1990. – P. 3-62.
- 3 Cirelli M, Gennaro C. PPPC 4 TM ID : A Poor Particle Physicist Cookbook for DarkMatter Indirect Detection // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. – 2011. – Vol. 11. – Issue 03 – P.57.
- 4 Steigman G., Turne M. S. Cosmological constraints on the properties of weakly interacting massive particles // *Nuclear Physics B*. – 1985. – Vol.–253. P. 375–386.
- 5 Walter F., Brinks E., de Blok, Bigiel F., Kennicutt R., Leroy A. THINGS: the hi nearby galaxy survey // *The Astrophysical Journal*. – 2008. – Vol.136. – P. 8-15.
- 6 Siutsou I., Arguelles C. R., Ruffini R. Dark Matter Massive Fermions and Einasto Profiles in Galactic Haloes // *Astronomy Reports*. – 2015. – Vol.59. – P. 1-8.
- 7 Navarro J. F., Frenk C.S., White S.D. The Structure of Cold Dark Matter Halos // *Astrophysical Journal*. – 1996. –Vol.462. – P.563.
- 8 Moore B., Governato F., Quinn T. Resolving the Structure of Cold Dark Matter Halos // *Astrophysical Journal*. – 1998. – Vol. 499. – P. 3-8.
- 9 Einasto J. Dark matter, Large-scale structure of the universe, CMB radiation, Astrophysics - Cosmology and Extragalactic Astrophysics // *Brazilian Journal of Physics*. – 2013. – Vol. 43. – P. 72-83.
- 10 Jimenez R., Verde L., Oh S. P. Dark halo properties from rotation curves // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2003. – Vol. 339. – №. 1. – P. 243-259.
- 11 Burkert A. The structure of dark matter halos in dwarf galaxies // *The Astrophysical Journal*. – 1995. – Vol. 447. – №. 1. – P. L25-28.
- 12 Sofue Y. Rotation curve and mass distribution in the galactic center – from black hole to entire galaxy // *Publications of the Astronomical Society of Japan*. – 2013 – Vol. 65. – P. 118.
- 13 Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. M. Simulations of X-ray clusters // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 1995. – Vol. 275. – №. 3. – P. 720-740.
- 14 Brownstein J. R., Moffat J. W. Galaxy rotation curves without nonbaryonic dark matter // *The Astrophysical Journal*. – 2006. – Vol. 636. – №. 2. – P. 721.
- 15 Pieterse C. Galaxy Rotation Curves of a Galactic Mass Distribution. – 2017 – P.21.
- 16 Marchesini D., Elena D’Onghia, Chincarini G., Claudio F. H $\alpha$  rotation curves: the soft core question // *The Astrophysical Journal*. 2002. – Vol.575. – P. 801-813.
- 17 Levenberg K. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares // *Quarterly of Applied Mathematics*. – 1944. – Vol.2. – P. 164-168.
- 18 Marquardt D. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters // *SIAM Journal on applied mathematics*. – 1963. – Vol.11. – P. 431-441.

- 19 Schwarz G. Estimating the Dimension of a Model // Institute of Mathematical Statistics. – 1978. – Vol. 6. – P. 461–464.
- 20 Carignan C., Freeman K. C. DDO 154-A 'dark' galaxy? // The Astrophysical Journal. – 1988. – Vol. 332. – P. L33-L36.
- 21 Broeils A. H. The mass distribution of the dwarf spiral NGC 1560 // Astronomy and astrophysics. – 1992. – Vol. 256. – P. 19-32.
- 22 Fraternali F., Moorsel G. Deep HI survey of the spiral galaxy NGC 2403 // The Astronomical Journal. – 2002. – Vol. 123. – №. 6. – P. 3124.
- 23 Simon J. D., Bolatto, A. D., Leroy, A. High-resolution measurements of the dark matter halo of NGC 2976: evidence for a shallow density profile // The Astrophysical Journal. – 2003. – Vol. 596. – №. 2. – P 957.
- 24 Chemin L., Cayatte V., Balkowski C. An H $\alpha$  study of the kinematics of NGC 3627 // Astronomy & Astrophysics. – 2003. – Vol. 405. – №. 1. – P. 89-97.
- 25 Stéphanie C., Carignan C. A Dark–Halo–Dominated Galaxy: NGC 5585 // The Astronomical Journal. – 1991. – Vol.102. – P.100 -106.
- 26 Boshkayev K., Zhumakhanova G., Mutalipova K., Muccino M. Investigation of different dark matter profiles // Известия НАН РК. Серия физико-математических наук. – 2019. – Vol. 6. – P. 25-33.
- 27 Sofue Y. Dark halos of M31 and the Milky Way // Astronomical Society of Japan. – 2015. – Vol.67. – P. 9.
- 28 Salucci P. Dark Matter in Galaxies: Evidences and Challenges // Foundations of Physics. – 2018. – Vol. 48. – P.1517-1537.
- 29 David A. Buote, Aaron J. Barth. The extremely high dark matter halo concentration of the relic compact elliptical galaxy Mrk 1216 // The Astrophysical Journal. – 2019. Vol.877. – P. 29.
- 30 Danieli S., Pieter van Dokkum Conroy C. Still missing dark matter: KCWI high–resolution stellar kinematics of NGC 1052–DF2 // The Astrophysical Journal Letters. – 2019. – Vol.874. – P. 8.
- 31 Merle A. keV Neutrino model building // International Journal of Modern Physics D. – 2013. – Vol.22. – P.36.
- 32 Boshkayev K., Konysbayev T., Kurmanov E.; Luongo O., Muccino M. Imprint of Pressureon Characteristic Dark Matter Profiles: The Case of ESO0140040 // Galaxies. – 2020. – Vol.8. – P.74.
- 33 Tang M., Xu Z., Wang J. Observational constraints on Rastall gravity from rotation curves of low surface brightness galaxies // Chinese Physics C. – 2020. – Vol. 44. – №. 8. – P. 085104.
- 34 Ruffini R., Arguelles C. R., Rueda J. A. On the core-halo distribution of dark matter in galaxies // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2015. – Vol.451. – P.622-628.
- 35 Barranco J., Bernal A., Núñez D. Dark matter equation of state from rotational curves of galaxies // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2015 – Vol. 449. – P. 403–413.

- 36 Aprile E., Aalbers, J., Agostini, F., Alfonsi, M., Amaro, F. D., Anthony, M. Physics reach of the XENON1T dark matter experiment // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. – 2016. – Vol. 2016. – №. 04. – P. 027.
- 37 Massey R., Kitching T., Richard J. The dark matter of gravitational lensing // *Reports on Progress in Physics*. – 2010. – Vol. 73. – №. 8. – P. 086901.
- 38 Boshkayev K., Konysbayev T. K., Kurmanov E. B., Muccino M., Zhumakhanova G. Physical properties of dark matter in galaxy U11454 // *Physical Sciences and Technology*. – 2020. – Vol. 7. – №. 3-4. – P. 11-20.
- 39 López Fune E. Empirical velocity profiles for galactic rotation curves // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2018. – Vol. 475. – №. 2. – P. 2132-2163.
- 40 Saffer A. Exterior spacetime of relativistic stars in scalar-Gauss-Bonnet gravity // *Physical Review D*. – 1994 – Vol. 100. – P. 164-168.
- 41 Marquardt D. Classic and inverse compositional Gauss-Newton in global DIC // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2019 – Vol. 119. – P. 431–441.
- 42 Garcia-Aspeitia M.A., Lopez-Dominguez J.C., Ortiz C. Hinojosa-Ruiz S., Rodriguez-Meza M.A. Energy density profile inspired by noncommutativity // *Revista mexicana de física*. – 2017– Vol. 63. – P. 423-438.
- 43 Akaike H. A new look at the statistical model identification // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1974 – Vol. 19. – P. 716–723.
- 44 Kunz M., Trotta R., Parkinson D.R. Measuring the effective complexity of cosmological models // *Physical Review D*. – 2006 – Vol. 74. – P. 023503.
- 45 Will C.M. The Confrontation between General Relativity and Experiment // *Living Reviews in Relativity*. – 2014 – Vol. 17. – P. 4.
- 46 Del Popolo A. Dark matter, density perturbations, and structure formation // *Astronomy Reports*. – 2007 – Vol. 51. – P. 169–196.
- 47 Chechin L.M., Kurmanov E.B., Konysbaev T.K. Geometrical Optics in a Universe with Dominance of Dark Matter // *Russian Physics Journal*. – 2020 – Vol. 63. – P. 58–63.
- 48 Macri L.M., Stetson P.B., Bothun G.D., Jha S. The discovery of cepheids and a new distance to NGC 2841 using the Hubble space telescope // *The Astrophysical Journal*. – 2001. – Vol.559. – P.113.
- 49 Di Paolo C., Salucci P., Erkurt A. The universal rotation curve of low surface Bottomness galaxies – IV.The interrelation between dark and luminous matter // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2019. – Vol. 490. – P.5451 – 5477.
- 50 Boshkayev K., Konysbayev T.K., Kurmanov E.B., Muccino M. Dark matter properties in galaxy U5750 // *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Physico-Mathematical Series*. – 2020. – Vol. 6. – No. 334. – P. 81 - 90.
- 51 Shapiro S.L., Teukolsky S.A. Black holes, white dwarfs and neutron stars: The physics of compact objects. Wiley-VCH, 1986 – P. 645.

- 52 Weinberg S. Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity // WileyVCH. –1972 – P. 600.
53. Cowsik R.; McClelland J. An Upper Limit on the Neutrino Rest Mass // Physical Review Letters. – 1972 – Vol.29. – P. 669–670.
- 54 Gott J. R., I.; Gunn J.E.; Schramm D.N.; Tinsley B.M. An unbound universe? // The Astrophysical Journal. – 1974 – Vol.194. – P. 543-553.
- 55 Lee B.W.; Weinberg S. Cosmological Lower Bound on Heavy-Neutrino Masses// Physical Review Letters. – 1977 – Vol.39. – P. 165–168.
- 56 Tremaine S.; Gunn J.E. Dynamical Role of Light Neutral Leptons in Cosmology // Physical Review Letters. – 1979 – Vol.42. – P. 407-410.
- 57 Barrow J. D. Massive particles as a probe of the early universe //Nuclear Physics B. – 1982. – Vol. 208. – №. 3. – P. 501-508.
- 58 Chen D., Kan, E. C., Ravaioli, U., Shu, C. W., Dutton, R. W. An improved energy transport model including nonparabolicity and non-Maxwellian distribution effects // IEEE Electron Device Letters. – 1992. – Vol. 13. – №. 1. – P. 26-28.
- 59 Kalitkin N. N., Kolganov S. A. The Fermi-Dirac functions. Direct calculation of the functions //Keldysh Institute preprints. – 2018. – №. 235. – P. 1-29.
- 60 Zwierlein M. W., Stan C. A., Schunck C. H., Raupach S. M., Gupta S., Hadzibabic Z., Ketterle W. Observation of Bose-Einstein condensation of molecules //Physical review letters. – 2003. – Vol. 91. – №. 25. – P. 250401.
- 61 Ruffini R., Stella L. On semi-degenerate equilibrium configurations of a collisionless self-gravitating Fermi gas // Astronomy & Astrophysics. –1983 – Vol.119. – P. 35-44.
- 62 Viollier R. D., Trautmann D., and Tupper G. B. Supermassive neutrino stars and galactic nuclei // Physics Letters B. – 1993 –Vol. 306. – P. 79-85.
- 63 Chavanis P. Violent and mild relaxation of an isolated self-gravitating uniform and spherical cloud of particles // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2012 – Vol. 423. – P. 1610-1622.
- 64 Chavanis P. Statistical mechanics of the shallow water system // Physical Review. – 2002 – Vol. 65. – P. 2137.
- 65 Duhee Y., Hyerim M. Variations in the Raman Spectrum as a Function of the Number of Graphene Layers // Journal of the Korean Society. – 2009 – Vol. 55. – P. 1299-1303.
- 66 Bilic N., Munyaneza F., Tupper G. B., Viollier, R. D. The dynamics of stars near Sgr A\* and dark matter at the center and in the halo of the Galaxy // Progress in Particle and Nuclear Physics. – 2002 – Vol. 42. – P. 291-300.
- 67 Sang J.S. Late time Cosmological Phase Transition and Galactic Halo as Bose-liquid // Physical Review Letters. –1994 – Vol. 50. – P. 3650.
- 68 Spivey S. C., Musielak Z. E. and Fry J. L. Astronomical constraints on quantum theories of cold dark matter – I. Einasto density profile for galactic haloes // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2013 – Vol. 428. – P. 712-717.
- 69 Binney J., Tremaine S. Galactic Dynamics // Princeton University Press 2nd Edit. – 2008.

- 70 Gentile G., Famaey B., Zhao H., Salucci P. Universality of galactic surface densities within one dark halo scale-length // *Nature*. – 2009 – Vol. 461. – P.627-628.
- 71 Djorgovski S., Davis M. Fundamental Properties of Elliptical Galaxies // *The Astrophysical Journal*. – 1987 – Vol.313. – P.59.
- 72 Jorgensen I., Franx M., Kjaergaard P. The Fundamental Plane for cluster E and SO galaxies // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 1996 – Vol.280. – P.167.
- 73 Chemin L., de Blok W. J. G., Mamon G. A. Improved modeling of the mass distribution of disk galaxies by the Einasto halo model // *The Astronomical Journal*. – 2011. – Vol.142. – P. 115.
- 74 de Vega H. J., Salucci P., Sanchez N. G. M. The mass of the dark matter particle from theory and observations // *New Astronomy*. – 2012 – Vol.17. – P. 653-666.
- 75 de Blok W. J. G., Walter F., Brinks E., Trachternach C., Oh S.-H., Kennicutt R. C., Jr. High-Resolution Rotation Curves and Galaxy Mass Models from THINGS // *The Astronomical Journal*. – 2008. – Vol. 136. – P. 2648-2700.
- 76 Lynden-Bell D. Statistical Mechanics of Violent Relaxation in Stellar Systems // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 1967 – Vol. 136. – P. 101-110.
- 77 Chavanis P.-H. Exact diffusion coefficient of self-gravitating Brownian particles in two dimensions // *The European Physical University*. – 2002 – Vol. 57. – P. 57-63.
- 78 Chavanis P. Quasi-stationary states and incomplete violent relaxation in systems with long-range interactions // *Physica A Statistical Mechanics and its Applications*. – 2006. – Vol. 365. – P. 102.
- 79 Shu F. H. On the statistical mechanics of violent relaxation. // *The Astrophysical Journal* – 1978. – Vol. 225. – P. 83.
- 80 Kull A., Treumann R. A., and Boehringer H., Dark Matter in Clusters of Galaxies and the Neutrino Rest Mass // *The Astrophysical Journal* – 1996. – Vol. 46. – P. 173.
- 81 Gao J. G., Merafina M., and Ruffini R. The semidegenerate configurations of a selfgravitating system of fermions // *Astronomy & Astrophysics*. – 1990. – Vol. 235. – P. 1 -7.
- 82 Krut A., Arguelles C., Rueda J. Review of the fermionic dark matter model applied to galactic structures // *AIP Conference Proceedings*. – 2015. – Vol. 1693. – P. 15.
- 83 Ruffini R., Bonazzola S. Systems of self-gravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state // *Physical Review*. – 1969. – Vol. 187. – №. 5. – P. 1767-1783.
- 84 Martel K., Poisson E. Gravitational perturbations of the Schwarzschild spacetime: a practical covariant and gauge-invariant formalism // *Physical Review D*. – 2005. – Vol. 71. – №. 10. – P. 104003.

85 Gao J. G., Merafina M., and Ruffini R. System of self-gravitating semidegenerate fermions with a cutoff of energy and angular momentum in their distribution function // *Astronomy & Astrophysics*. – 1992. – Vol. 258. – P. 223-233.

86 Gillessen S., Eisenhauer F., Fritz T. K., Bartko H., Dodds-Eden K., Pfuhl O., Ott T., Genzel R., The orbit of the star S2 around Sgr A\* from very large telescope and keck data // *The Astrophysical Journal*. – 2009. – Vol.707. – P. 114-117.

87 de Vega H.J., Salucci P., Sanchez N.G. Observational rotation curves and density profiles versus the Thomas–Fermi galaxy structure theory // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2014. – Vol. 442. – P. 2717.

88 Chavanis P.H., Sommeria J. Degenerate equilibrium states of collisionless stellar systems // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 1998. – Vol.296. – P. 569–578.

89 Chavanis P.H. Generalized thermodynamics and kinetic equations: Boltzmann, Landau, Kramers and Smoluchowski // *Physica A*. – 2004. – Vol. 332. – P. 89–122.

90 Chavanis P.H., Lemou M., Méhats F. Models of dark matter halos based on statistical mechanics: The fermionic King model // *Physical Review*. – 2015. – Vol.92. – P.12.

91 Ghez A. M., Salim S., Weinberg N. N., Lu J. R., Do T., Dunn J. K., Matthews K., Morris M. R., Yelda S., Becklin E. E. Measuring Distance and Properties of the Milky Way’s Central Supermassive Black Hole with Stellar Orbits // *The Astrophysical Journal*. – 2008. – Vol.689. – P. 1044.

92 Sofue Y., Honma M., Omodaka T. Unified Rotation Curve of the Galaxy - Decomposition into de Vaucouleurs Bulge, Disk, Dark Halo, and the 9-kpc Rotation Dip // *Publications of the Astronomical Society of Japan*. – 2009. – Vol. 61. – P. 227.

93 Walker M. G., Mateo M., Olszewski E. W., Penarrubia J., Wyn Evans N., Gilmore G. A Universal mass profile for dwarf spheroidal galaxies? // *The Astrophysical Journal*. – 2009. – Vol.704. – P. 1274.

94 Boyarsky A., Ruchayskiy O., Iakubovskiy D., Maccio A., Malyshev D. The role of sterile neutrinos in cosmology and astrophysics // *Annual Review of Nuclear and Particle Science*. – 2009. – Vol.59. – P. 112.

95 Pato M., Iocco F., Bertone G. Dynamical constraints on the dark matter distribution in the Milky Way // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* – 2015. – Vol. 12. – P.201-211.

96 Sofue Y. Grand rotation curve and dark matter halo in the Milky Way galaxy // *Publications of the Astronomical Society of Japan*. – 2012. – Vol.64. – P. 67-76.

97 Gibbons S.L.J., Belokurov V., Evans N.W. ‘Skinny Milky Way please’, says Sagittarius // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2014. – Vol.445. – P. 3788-3802.

98 Portail M., Gerhard O., Wegg C., Ness M. Dynamical modelling of the galactic bulge and bar: the Milky Way’s pattern speed, stellar and dark matter mass

distribution // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2017. – Vol.465. – P. 1621–1644.

99 Argüelles C.R., Ruffini R. Are the most super-massive dark compact objects harbored at the center of dark matter halos? // International Journal of Modern Physics – 2014. – Vol.23. –P. 42020.

100 Argüelles C.R., Ruffini R., Fraga B.M.O. Critical configurations for a system of semidegenerate fermions // Journal of the Korean physical society. – 2014. – Vol.65. P. 809–813.

101 Iocco F., Pato M., Bertone G. Evidence for dark matter in the inner Milky Way // Nature Physics – 2015. – Vol.11. – P. 245–248.

102 Fraga B. M., Arguelles C. R., Siutsou I., Ruffini R. Novel approaches to the study of particle dark matter in astrophysics // The Thirteenth Marcel Grossmann Meeting B. – 2014. – Vol.1730.

103 Madsen J. Generalized Tremaine-Gunn limits for bosons and fermions // Physical Review D. – 1991. – Vol. 44. – №. 4. – P. 999.

104 Giorgini S., Pitaevskii L. P., Stringari S. Theory of ultracold atomic Fermi gases // Review of Modern Physics. – 2008. – Vol.80. – P. 1215.

105 Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. The Density Profiles of the Dark Matter Halo Are Not Universal // The Astrophysical Journal. – 1997. – Vol.490. – P. 493.

106 de Blok W. J. G., McGaugh S. S., Rubin V. C. High-Resolution Rotation Curves of Low Surface Brightness Galaxies. II. Mass Models // The Astrophysical Journal. – 2001. – Vol.122. – P. 2396.

107 Einasto J., Haud U. Galactic models with massive corona. I - Method. II – Galaxy // Astronomy and Astrophysics. – Vol.223. – P.89.

108 Einasto J. On the Construction of a Composite Model for the Galaxy and on the Determination of the System of Galactic Parameters // Trudy Astrofizicheskogo Instituta Alma-Ata. – 1965. – Vol.5. – P. 87-100.

109 Boyarsky A., Ruchayskiy O., Shaposhnikov M. Unidentified line in X-ray spectra of the Andromeda galaxy and Perseus galaxy cluster // Annual Review of Nuclear and Particle Science. – 2009. – Vol.59. – P. 6.

110 Ferrarese L. Supermassive black holes: Relation to dark halos // The Astrophysical Journal. – 2002. – Vol.578. – P. 90.

111 Ferrarese L. Black Hole Demographics // Physical Review Letters. – 2002. – Vol.213. – P.164.

112 Argüelles R., Ruffini R., Bernardo M.O. Fraga Critical configurations for a system of semidegenerate fermions // Astrophysics of Galaxies. – 2014. – Vol.65. – P.809-813.

113 Cirelli M. PPC 4 DM ID: a poor particle physicist cookbook for dark matter indirect detection // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics– 2011. – Vol.51. –P.102-110.

114 Nesti F., Salucci P. The Dark Matter halo of the Milky Way // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics– 2013. – Vol.16.

- 115 Event Horizon Telescope Collaboration, First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole // *The Astrophysical Journal Letters*. – 2019. – Vol.875. P. 1-52.
- 116 Falcke H., Melia F., Agol E., Viewing the Shadow of the Black Hole at the Galactic Center // *The Astrophysical Journal Letters*. – 2000. – Vol. 528. – L13.
- 117 Lu R.-S. Detection of Pulses from the Vela Pulsar at Millimeter Wavelengths with Phased ALMA // *The Astrophysical Journal Letters*. – 2018. – Vol. 859. – P. 60.
- 118 Boshkayev K., Idrissov A., Luongo O., Malafarina D. Accretion disc luminosity for black holes surrounded by dark matter // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2020. – Vol. 496. – P. 1115–1123.
- 119 Luongo O., Muccino M. Speeding up the Universe using dust with pressure // *Physical Review D*. – 2018. – Vol. 98. – P. 103520.
- 120 Luongo O., Quevedo H. A unified dark energy model from a vanishing speed of sound with emergent cosmological constant // *International Journal of Modern Physics D*. – 2014. – Vol.23. – P.1450012.
- 121 Boshkayev K., Konysbayev T., Luongo O., Muccino M., Pace F. Testing generalized logotropic models with cosmic growth // *Physical Review D*. – 2021. – Vol. 104. – P. 023520.
- 122 Boshkayev K., D’Agostino R., Luongo O. Extended logotropic fluids as unified dark energy models // *The European Physical Journal C*. – 2019. – Vol. 79. – Issue 4. – P. 7.
- 123 Boshkayev K., Konysbayev T., Kurmanov E., Luongo O., Malafarina D., Mutalipova K., Zhumakhanova G. Effects of non-vanishing dark matter pressure in the Milky Way Galaxy // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2021. – Vol. 508. – №. 1. – P. 1543-1554.
- 124 Boshkayev K., Malafarina D. A model for a dark matter core at the Galactic Centre // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2019. – Vol.484. – P.3325-3333.
- 125 Debattista V. P., Moore B., Quinn T., Kazantzidis S., Maas R., Mayer L., Read J., Stadel J. The Causes of Halo Shape Changes Induced by Cooling Baryons: Disks versus Substructures // *The Astrophysical Journal*. – 2008. – Vol. 681. – P 1076.
- 126 Gnedin O. Y., Primack J. R. Dark Matter Profile in the Galactic Center // *Physical Review Letters*. – 2004. – Vol. 93. – P. 061302.
- 127 Ullio P., Zhao H., Kamionkowski M., Dark-matter spike at the galactic center? // *Physical Review D*. – 2001. – Vol.64. – P. 043504.
- 128 Salucci P., Burkert A., DARK MATTER SCALING RELATIONS // *The Astrophysical Journal*. – 2000. – Vol.537. – L9.
- 129 Jusufi K., Jamil M., Salucci P., Zhu T., Haroon S. Black hole surrounded by a dark matter halo in the M87 galactic center and its identification with shadow images // *Physical Review D*. – 2019. – Vol.100. – P. 044012.



- 130 Joshua J.Adams., Gebhardt K. Hill G.J. High-resolution measurements of the dark matter halo of NGC 2976: Evidence for a shallow density profile // *The Astrophysical Journal*. – 2003. – Vol.596. – P.276.
- 131 Castignani G., Frusciante N., Vernieri D., Salucci P. The density profiles of dark matter halos in spiral galaxies // *Natural Science*. – 2012. – Vol. 4. – P. 265.
- 132 Doeleman S. S., Weintroub J., Rogers A. E., Plambeck R., Freund R., Tilanus R. P. Event-horizon-scale structure in the supermassive black hole candidate at the Galactic Centre // *Nature*. – 2008. – Vol.455. – P.78.
- 133 Sofue Y. Rotation Curve of the Milky Way and the Dark Matter Density // *Galaxies*. – 2020. – Vol.8. – P. 20.
- 134 Mukhanov V. F., Feldman H. A., Brandenberger R. H. Theory of cosmological perturbations // *Physical Report*. – 1992. – Vol.215. – P.203.
- 135 Faber T., Visser M. Combining rotation curves and gravitational lensing: how to measure the equation of state of dark matter in the galactic halo // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2006. – Vol. 372. – P.136.
- 136 Rezaei Z. Effects of dark matter pressure on the ellipticity of cosmic voids // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2019. – Vol.487. – 2614.
- 137 Serra A. L., Dominguez Romero M. J. L. Measuring the Mass Distribution in Galaxy Clusters // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2011. – Vol.415. – L74.
- 138 Kopp M., Skordis C., Thomas D. B., Ilic S. Dark Matter Equation of State through Cosmic History // *Physical Review Letters*. – 2018. – Vol.120. – P.221102.
- 139 Perlick V. Gravitational Lensing from a Spacetime Perspective // *Living Reviews in Relativity*. – 2004. – Vol.7. – P. 9.
- 140 Becerra-Vergara E. A., Arguelles C. R., Krut A., Rueda J. A., Ruffini R. The geodesic motion of S2 and G2 as a test of the fermionic dark matter nature of our galactic core // *Astrophysics of Galaxies*. – 2020. – Vol.641. – P.16.
- 141 Nakama, T. Gravitational waves from binary black holes as probes of the structure formation history // *Physics of the Dark Universe*. – 2020. – Vol.28. – P.100476.
- 142 Abbott B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., Abernathy, M. R., Acernese, F., Ackley, K. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger // *Physical Review Letters*. – 2016. – Vol.116. – P. 061102.
- 143 Pretorius F. Evolution of binary black-hole spacetimes // *Physical Review Letters*. – 2005. – Vol.95. – P.121101.
- 144 Johannsen T. Sgr A\* and general relativity // *Classical and Quantum Gravity*. – 2016. – Vol.33. – P.113001.
- 145 Kim J., Marrone D. P., Chan C., Medeiros L., Ozel F., Psaltis D. Bayesian Techniques for Comparing Time-dependent GRMHD Simulations to Variable Event Horizon Telescope Observations // *The Astrophysical Journal*. – 2016. – Vol.832. – P.156.
- 146 Yi W., Wang, F., Wu, X. B., Yang, J., Bai, J. M., Fan, X. SDSS J013127.34-032100.1: A Newly Discovered Radio-loud Quasar at  $z= 5.18$  with

Extremely High Luminosity // The Astrophysical Journal Letters. – 2014. – Vol.795. – L29.

147 Zhang X., Shinshi T., Li L., Shimokohbe A. Precision Control for Rotation about Estimated Center of Inertia of Spindle Supported by Radial Magnetic Bearing // JSME International Journal Series C. – 2004. – Vol.47. – P.242-250.

148 Cardoso V., Lemos J.P. Gravitational radiation from the radial infall of highly relativistic point particles into Kerr black holes // Physical Review D. – 2003. – Vol.67. – P.084005.

149 Freese K. Status of dark matter in the universe // International Journal of Modern Physics D. – 2017. – Vol.26. – P.1730012.

150 Genzel R., Eisenhauer F., Gillessen S. The galactic center massive black hole and nuclear star cluster // Reviews of Modern Physics. – 2010. – Vol.82. – P.3121-3195.

151 Ghez A. M., Salim S., Hornstein S. D., Tanner A., Lu J. R., Morris M., Becklin E. E., Duchene G. Stellar Orbits around the Galactic Center Black Hole // The Astrophysical Journal. 2005. – Vol.620. – P.744-757.

152 Yuan F., Narayan R. Hot Accretion Flows Around Black Holes // Annual Review of Astronomical Astrophysics. – 2014. – Vol.52. – P.529-588.

153 Becerra-Vergara E. A., Arguelles C. R., Krut A., Rueda J. A., Ruffini R. Hinting a dark matter nature of Sgr A\* via the S-stars // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2021. – Vol.505. – L64-L68.

154 Boshkayev K., Konysbayev T., Kurmanov E., Luongo O., Muccino M., Quevedo H., Taukenova A., Urazalieva A., Zhumakhanova, G. Motion of stars near the galactic center // International Journal of Mathematics and Physics. – 2021. – Vol. 12. – №. 2. – P. 79-86.

155 McMillan P. J. The mass distribution and gravitational potential of the Milky Way // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2017. – Vol. 465. – P.76-94.

156 Landau L.D., Lifshitz E. M. Mechanics // Oxford: Pergamon Press. – 1969.